ΓΚΕΝΤΕΛ

κείμενο: Γ. Κασαπίδης

Την Παρασκευή ενός Μαρτιάτικου απογεύματος συνάντησα τυχαία στην πλατεία ελευθερίας έναν παλιό γνώριμο από τα φοιτητικά μου χρόνια. Εγώ τότε σπούδαζα μαθηματικά ενώ αυτός Ελληνική φιλολογία. Ο διάλογος που ακολουθεί έγινε στο «πόδι» περπατώντας από την πλατεία ελευθερίας , και περιδιαβαίνοντας στους διαδρόμους του δημοτικού κήπου της Δράμας.

Φ1 Χθες τελείωσα την ανάγνωση του μυθιστορήματος του Τεύκρου Μιχαηλίδη «Πυθαγόρεια εγκλήματα.» Οφείλω να ομολογήσω ότι μου φαίνεται τελείως ακατανόητο το πως είναι δυνατόν κάποιος να οδηγηθεί σε φόνο εξ αιτίας κάποιου μαθηματικού θεωρήματος.

Φ2 Εξ αιτίας ενός υποτιθέμενου θεωρήματος , αφού όπως φάνηκε στη συνέχεια το θύμα πίστευε λανθασμένα ότι απέδειξε το δεύτερο πρόβλημα του Χίλμπερτ, ενώ ο Γκέντελ, κατάφερε να δείξει πως κάτι τέτοιο δεν θα ήταν ποτέ δυνατό να γίνει. Αλλά ήταν πλέον πολύ αργά, και για το θύμα, και για τον θύτη. Σίγουρα πιστεύεις πως οι «ψυχροί» αριθμοί, δεν μπορούν να στοιχειώσουν τα μυαλά των ανθρώπων προκαλώντας πάθη και νοητικές θύελλες, στ' αλήθεια όμως, κατανοείς το περιεχόμενο αυτού του θεωρήματος;

Φ1 Το θεώρημα του Γκέντελ δεν λέει ότι και να θέλουμε δεν μπορούμε να αποδείξουμε τα πάντα;
Αυτό όμως το βρίσκω τελείως αναμενόμενο, αφού για να αποδείξουμε κάτι πρέπει να βασιστούμε σε κάτι άλλο και έτσι για να μην απεραντολογούμε, θα πρέπει να σταματήσουμε κάπου και να
δεχτούμε την αλήθεια κάποιων πραγμάτων, δίχως να απαιτήσουμε για αυτά απόδειξη, τα αξιώματα, όπως με μεγάλη έμφαση τα έλεγαν οι μαθηματικοί μας στο γυμνάσιο. Δηλαδή πάντα θα υπάρχουν αυτές οι αρχικές προτάσεις για τις οποίες δεν θα διαθέτουμε αποδείξεις.

Φ2 Δεν είναι ακριβώς αυτό το νόημα του θεωρήματος. Το πρώτο θεώρημα του Γκέντελ μας βεβαιώνει ότι όποια αξιώματα και να επιλέξουμε πάντα θα υπάρχουν προτάσεις της αριθμητικής, εκτός από τα αξιώματα, που αν και είναι αληθείς δεν μπορούν να αποδειχτούν ούτε αυτές , ούτε οι αρνήσεις τους.

Φ1 Τι το διαφορετικό μου λες τώρα;

Φ2 Κοίταξε να δείς. Οι άνθρωποι , οι μαθηματικοί και οι φιλόσοφοι περισσότερο,από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων ακόμη, πίστεψαν ότι υιοθετώντας ένα αξιωματικό σύστημα αναφορικά προς κάποια περιοχή γνώσης, θα μπορούσαν να παράγουν όλες τις αλήθειες αυτής της περιοχής με έναν αλάνθαστο τρόπο. Το θεώρημα του Γκέντελ χτυπά αυτή την αντίληψη και την ανατρέπει. Τα αξιωματικά συστήματα παράγουν μεν ορθές προτάσεις ,όμως ποτέ δεν είναι πλήρη, δηλαδή ποτέ δεν μπορούν να μας δώσουν όλες τις αλήθειες της γνωστικής περιοχής που μελετάμε.

Φ1 Και πότε απέδειξε ο Γκέντελ το θεώρημά του;

Φ2 Το 1931 στην Βιέννη.

Φ1 Καλά, και από τότε κανείς δεν κατάλαβε πως πρέπει να βάλει ένα τέλος στον τρόπο που διδάσκονται τα μαθηματικά και να σηκώσει από πάνω μας αυτόν τον σταυρό του μαρτυρίου που λέγεται απόδειξη; Αφού τα αξιωματικά συστήματα δεν είναι πλήρη, για ποιόν λόγο όλος αυτός ο μαζοχισμός;

Φ2 Τι πιστεύεις ότι είναι μια απόδειξη;

ΓΚΕΝΤΕΛ

κείμενο: Γ. Κασαπίδης

Φ1 Ένας ισχυρισμός που τον βρίσκουμε τόσο πειστικό ώστε να τον χρησιμοποιούμε για να πείσουμε και τους άλλους.

Φ2 Και τι είναι αυτό που μπορεί να κάνει πειστικό έναν ισχυρισμό; Η ρητορική δεινότητα μήπως;

Φ1 Όχι βέβαια. Με την ρητορική θα μπορούσα να παρασύρω κάποιον αδαή , ξέρεις ο λόγος ασκεί μια υποβλητική μαγεία στα μυαλά των ανθρώπων, και να τον κάνω να πιστέψει κάτι, αλλά ο τρόπος για να πείσω και τον ποιο καχύποπτο σκεπτικιστή είναι η λογική επιχειρηματολογία.

Φ2 Αρκεί βέβαια ο κ. Καχύποπτος να είναι το ίδιο λογικός με σένα.

Φ1 Εννοείται. Με έναν τρελό δεν υπάρχει δίαυλος επικοινωνίας.

Φ2 Και πού εδράζει αυτή η κοινή λογικότητα που πρέπει να έχουν δυο άνθρωποι ώστε να μπορεί ο ένας να αποδείξει κάτι στον άλλον;

Φ1 Μάλλον στον κοινό τρόπο που είναι κατασκευασμένος ο ανθρώπινος εγκέφαλος

Φ2 Υπονοείς δηλαδή ότι η λογικότητα είναι έμφυτη στο είδος μας.

Φ1 Γιατί, έχεις καμιά αμφιβολία γι' αυτό;

Φ2 Έχω κάποιες επιφυλάξεις, αλλά πες μου , αν εδώ μαζί μας ήταν ένας Κινέζος που δεν γνωρίζει ελληνικά ,κι εσύ απ' ότι ξέρω δεν γνωρίζεις κινέζικα, πώς θα μπορούσες να του αποδείξεις κάτι;

Φ1 Προφανώς δεν θα μπορούσα. Είναι αναγκαίο για να αποδείξω κάτι σε κάποιον ,να μιλάω την ίδια γλώσσα μ' αυτόν. Η γλώσσα είναι το εργαλείο με το οποίο μπορώ να του μεταφέρω τις σκέψεις μου και να του υποδείξω τους λογικούς συσχετισμούς τους.

Φ2 Μήπως λοιπόν αυτό που λέμε λογικότητα είναι ένας συγκεκριμένος τρόπος χρήσης της γλώσσας;

Φ1 Ίσως , δεν ξέρω, τι να σου πω;

Φ2 Όπως και να έχει το πράγμα , ας κρατήσουμε αυτό στο οποίο συμφωνούμε, ότι δηλαδή για να αποδείξης κάτι χρειάζεσαι απαραίτητα μια γλώσσα. Αυτή η εικόνα που έχεις για την απόδειξη ,προσιδιάζει σε αυτό που λέμε **σημασιολογική απόδειξη**, και είναι ο τρόπος με τον οποίο βεβαιώνουμε την αλήθεια κάποιων προτάσεων. Αυτού ακριβώς του είδους τις αποδείξεις , και πολύ σωστά, μας διδάσκουν στα σχολεία. Η έννοια όμως της απόδειξης για την οποία κάνει λόγο ο Γκέντελ δεν είναι αυτή. Η απόδειξη ως έννοια της μαθηματικής λογικής είναι αυτό που ακριβέστερα θα έπρεπε να ονομάζουμε **τυπική απόδειξη**, και αφορά έναν καθαρά μηχανικό τρόπο παραγωγής προτάσεων κάνοντας χρήση σαφώς καθορισμένων κανόνων. Δεν χρειάζεται για την εφαρμογή αυτών των κανόνων ανθρώπινη ευφυΐα , αλλά και μια μηχανή ,ένας κομπιούτερ για παράδειγμα, θα μπορούσε να τους πραγματοποιήσει.

Φ1 Και πως μπορεί μια μηχανή να συλλάβει το νόημα κάποιων προτάσεων για να μπορέσει στη συνέχεια να τις αποδείξει;

Φ2 Εδώ ακριβώς είναι το λεπτό σημείο. Η μηχανή δεν καταλαβαίνει το νόημα των προτάσεων, αλλά κάνοντας χρήση μιας καλά ορισμένης γλώσσας χειρίζεται τις προτάσεις μέσω της μορφής τους και όχι μέσω του περιεχομένου τους. Ακριβώς όντας , εφοδιασμένη με ένα σύνολο κανόνων κάθε φορά που συναντάει μια συγκεκριμένη μορφή ενεργεί με έναν συγκεκριμένο τρόπο.

Φ1 Δεν καταλαβαίνω τι ακριβώς θέλεις να πεις.

Φ2 Εντάξει, θα προσπαθήσω να σου το εξηγήσω με ένα χονδροειδές παράδειγμα, όχι από το χώρο των μαθηματικών. Η μικρή μου κόρη στο σπίτι έχει ένα παζλ που εικονίζει κάποιον άνθρωπο που φορά καπέλο, βρίσκεται μέσα σε ένα δάσος και παρακολουθεί δυο ελάφια που πίνουν νερό. Η κόρη μου ξέρει πολύ καλά ότι το καπέλο το φορούν οι άνθρωποι πάνω στο κεφάλι τους όπως και ότι τα κέρατα φυτρώνουν στα ζώα επίσης στο κεφάλι τους. Έτσι οι πρώτες κινήσεις που κάνει για την συναρμολόγηση του παζλ ,είναι να τοποθετήσει το κομμάτι με το καπέλο πάνω στο κομμάτι που είναι το κεφάλι του ανθρώπου. και το κομμάτι με τα κέρατα πάνω από το κομμάτι με το κεφάλι του μεγάλου ελαφιού. Γνωρίζει ότι τα νεαρά ελαφάκια δεν έχουν κέρατα. Με τον καιρό έμαθε να συναρμολογεί το παζλ τόσο γρήγορα που ποια δεν είχε ενδιαφέρον το παιχνίδι. Έτσι μια μέρα την είδα να κάνει το εξής καταπληκτικό. Είχε γυρίσει ανάποδα τα κομμάτια, ώστε να μην φαίνεται η εικόνα τους και προσπαθούσε να τα ταιριάξει με βάση το σχήμα τους. Αυτό στην αρχή ήταν τελείως απογοητευτικό, γιατί έπρεπε για κάθε κομμάτι να βρει ανάμεσα στα υπόλοιπα το μοναδικό εκείνο που το σχήμα του ταίριαζε ακριβώς με το σχήμα του αρχικού. Και πάλι όμως με τον καιρό κατάφερε να συνθέτει ,με πολύ ποιο αργούς ρυθμούς βέβαια, το παζλ. Το καύχημά της τώρα ήταν ότι ακόμα κι αν αλλάζαμε την εικόνα δεν θα άλλαζε τίποτα στην διαδικασία συναρμολόγησης.
Οι σημασιολογικές αποδείξεις είναι σαν την σύνθεση του παζλ βλέποντας τις εικόνες, ενώ η τυπική απόδειξη, αυτή που σε αντίθεση με τον άνθρωπο μια μηχανή μπορεί να την κάνει πολύ ποιο γρήγορα, είναι σαν την συναρμολόγηση του παζλ δίχως να βλέπουμε τις εικόνες , βασιζόμενοι στην μορφή που έχουν τα κομμάτια του.

Φ1 Νομίζω πως αρχίζω να καταλαβαίνω. Ίσως έτσι να εξηγείται και ο αφηρημένος χαρακτήρας των μαθηματικών. Το βρίσκω όμως τελείως ανόητο ,αν όχι ψυχασθενικό, το να συνθέτει κάποιος παζλ δίχως εικόνες σε αντίθεση με την δημιουργική προσπάθεια να συμπληρώσεις ένα δύσκολο παζλ γιατί έτσι θα μπορέσεις να αποκαλύψεις κάτι το πραγματικό ή κάτι ωραίο που υπάρχει στον κόσμο. Αυτή την δημιουργική πλευρά των μαθηματικών ελάχιστοι μαθηματικοί στο σχολείο κατάφεραν να μας την δείξουν. Προσωπικά δεν θυμάμαι να είχα κανέναν τέτοιο δάσκαλο. Οι περισσότεροι ήταν τυπολάτρες ψυχάκιες παρανοϊκοί και ανισόρροποι βασανιστές , σε βαθμό που πολλές φορές σκεφτόμουν πως ο κόσμος θα ήταν αφάνταστα καλύτερος αν εκλείπανε αυτοί οι άνθρωποι.

Φ2 Ηρέμησε! Αν συνεχίσεις έτσι θα αρχίσω να φοβάμαι για την σωματική μου ακεραιότητα. Πάντως αν αυτή η μικρή συζήτησή μας είχε σαν αποτέλεσμα να σου βγάλει στην επιφάνεια τόσα αρνητικά συναισθήματα για τους μαθηματικούς , σκέψου και τον ήρωα του βιβλίου που διάβαζες όταν άκουσε ότι ο φίλος του κατάφερε να λύσει το δεύτερο πρόβλημα του Χίλμπερτ που λίγο πολύ ισχυρίζεται πως μια τελεσίδικη τυποποίηση μπορεί να υπάρξει για οποιωνδήποτε μαθηματικό κλάδο. Ο θύτης όντας ο ίδιος λάτρης των δημιουργικών ,όπως τα αποκάλεσες, μαθηματικών ,δεν μπόρεσε να αντέξει σε αυτήν την ιδέα.
Έτσι πήρε την μοιραία απόφαση να απαλλάξει την ανθρωπότητα από αυτό το «κακό» σκοτώνοντας τον φίλο του και καίγοντας την απόδειξή του. Διέπραξε όπως ο ίδιος λέει ένα «Πυθαγόρειο έγκλημα» ,παρόμοιο με αυτό που διέπραξαν αιώνες ποιο πριν οι μαθητές του Πυθαγόρα σκοτώνοντας τον επίσης πυθαγόρειο Ίππασο τον Μεταποντίνο, όταν ο τελευταίος

απέδειξε πως δεν υπάρχει κοινή μονάδα μέτρησης ανάμεσα στην πλευρά και στην διαγώνιο ενός τετραγώνου, ανατρέποντας έτσι την πίστη των πυθαγορείων ότι τα πάντα είναι αριθμός.

Φ1 Εσύ πάντως δεν μπορεί να κινδυνεύεις από έναν φιλόλογο σαν και μένα. Ότι αποδείξεις κάνετε εσείς οι μαθηματικοί αφορούν εσάς και τα μαθηματικά , σε τι θα μπορούσαν να παθιάσουν τον υπόλοιπο κόσμο;

Φ2 Φίλε , νομίζω πως σου έχει διαφύγει κάτι πολύ σημαντικό. Η απόδειξη του Ίππασου , αν την διατυπώσουμε με σύγχρονους όρους , δείχνει ότι η εξίσωση $\chi^2=2\psi^2$ δεν έχει λύσεις στους ακέραιους αριθμούς. Αυτό είναι ένα καθαρά μαθηματικό θέμα. Το θεώρημα του Γκέντελ δεν είναι ακριβώς ένα μαθηματικό θεώρημα ,αλλά ένα θεώρημα για τα μαθηματικά. Ανήκει στην περιοχή αυτή που λέγεται μεταμαθηματικά. Ρίχνει φως στις διαδικασίες και τις μεθόδους που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί και βάζει ένα όριο για το τι μπορούν και τι δεν μπορούν να πετύχουν με αυτές. Οι μαθηματικές αλήθειες είναι μέρος των αληθειών που αφορούν άλλους γνωστικούς κλάδους. Αν κάτι δεν μπορεί να γίνει σε αυτό το μικρό έστω μέρος γνώσης, αυτό δεν δείχνει ότι ενδεχομένως δεν θα μπορεί να γίνει και στο ευρύτερο πεδίο;

Φ1 Τώρα που το λες δεν φαίνεται να έχεις άδικο. Σε ποιους τομείς θα μπορούσαν να εκτείνονται οι συνέπειες αυτού του θεωρήματος; Ή καλύτερα αυτού του μεταθεωρήματος;

Φ2 Σίγουρα στην φιλοσοφία , αλλά τα τελευταία χρόνια και στην επιστήμη των υπολογιστών. Ενδεχομένως να αφορούν κι εσένα. Απ' ότι ξέρω ασχολείσαι με την συγγραφή μυθιστορημάτων.

Φ1 Μην με τρελαίνεις. Τι σχέση έχουν τα μυθιστορήματα που γράφω με το θεώρημα Γκέντελ;

Φ2 Δυνητικά θα μπορούσαν να έχουν. Όταν περιγράφεις τους ήρωές σου δεν ξεκινάς δίνοντας τους κάποια γνωρίσματα; είσαι σίγουρος ότι αυτά τα γνωρίσματα θα μπορούσαν πάντοτε λογικά να δικαιολογήσουν τις πράξεις τους; Θα με συγχωρέσεις όμως γιατί η ώρα έχει περάσει και έχω ένα σημαντικό ραντεβού. Σε προσκαλώ όμως την Κυριακή το μεσημέρι στο πατάρι του καφέ Μπαρόκ. Εκεί συναντιόμαστε και τα λέμε με τον φίλο μου Φ3. Πολλές από τις συζητήσεις μας στρέφονται γύρω από τα ζητήματα που μόλις έχουμε θίξει. Θα χαιρόμουν ιδιαίτερα αν ερχόσουν.

Φ1 Η συζήτησή μας με έχει φέρει σε έξαψη. Θα ήθελα πραγματικά να το ξαναπιάσουμε το ζήτημα. Θα προσπαθήσω να είμαι εκεί. Γεια χαρά , χαιρετίσματα στην οικογένειά σου.

Φ2 Γεια σου.

Περπατώντας μέχρι το διοικητήριο, όπου είχα παρκαρισμένο το αυτοκίνητο, έφερα και πάλι στο μυαλό μου την κουβέντα που είχα με τον Φ1. Είχα καταφέρει άραγε να του εξηγήσω την πραγματική σημασία του θεωρήματος Γκέντελ; Ως μαθηματικός εξοργίστηκα με τον εαυτό μου, αφού ακόμη και η διατύπωση που του ανέφερα για το θεώρημα ήξερα ότι δεν ήταν ακριβής. Θα έπρεπε να του εκφράσω το περιεχόμενο του θεωρήματος κάπως έτσι: Αν Τ είναι ένα τυπικό σύστημα που 1) είναι πεπερασμένα περιγράψιμο
2) επεκτείνει την αριθμητική Πεανό PA
3) είναι συνεπές
4) είναι ω-συνεπές
τότε το Τ είναι μη πλήρες.

Αυτή η διατύπωση μάλιστα. Κομψή ,λιτή και απέριττη ,σηματοδοτεί με τρόπο λακωνικό την ουσία του θέματος ,καθιστώντας φανερό το περιεχόμενό του. Ή μήπως όχι; Η δασκαλίστικη πλευρά μου τώρα εξοργισμένη έπαιρνε τον λόγο. Είσαι τρελός; μου έλεγε. Έτσι είναι που ο δυστυχής δεν θα καταλάβαινε τίποτα. Για άλλη μια φορά θα τον είχες πείσει ότι οι μαθηματικοί ασχολούνται με πομπώδεις ανοησίες που μόνο αυτοί καταλαβαίνουν, οι οποίες βρίσκουν την τέλεια εφαρμογή τους μόνο στην Νεφελοκοκκυγία, και κατά τρόπο μαγικό μερικές φορές και στον πραγματικό κόσμο. Τελικά πως μπορείς να μιλήσεις για κάτι επιστημονικό, και να είσαι σίγουρος ότι ο άλλος θα σε καταλάβει και κυρίως δεν θα παρανοήσει αυτά που του λες; Πόσες φορές τα τελευταία χρόνια δεν έχω διαβάσει διάφορα βιβλία που εκλαϊκεύουν την επιστήμη και που σπάνια τελικά πετυχαίνουν το στόχο τους να ξεκαθαρίσουν στον μη ειδικό αναγνώστη τις έννοιες που παρουσιάζουν, δίχως να του δημιουργήσουν παραπλανητικές και εσφαλμένες εικόνες; Μήπως η δυσκολία οφείλεται σε μια ουσιαστική ασυμμετρία ανάμεσα στην επιστημονική και στην φυσική γλώσσα, που κάνει αδύνατη μια πιστή μετάφραση της μιας στην άλλη;

Μπήκα στο αμάξι και ξεκίνησα. Για άλλη μια φορά η καθημερινότητα εισέβαλε με το έτσι θέλω στην ζωή μου, αποσπώντας με από τους συνειρμούς μου.

Την Κυριακή το μεσημέρι ο Φ1 με τηλεφώνησε. Συναντηθήκαμε μπροστά στο Ξενία, και περάσαμε απέναντι για να πάμε στο Μπαρόκ.

Φ1 Χθες το βράδυ είχε μια εκδήλωση ο σύλλογος θετικών επιστημών στο μικρό αμφιθέατρο του ωδείου, με θέμα «μαύρες τρύπες και ταξίδια στο χρόνο» , πίστευα πως θα σε εύρισκα εκεί, αλλά δεν σε είδα πουθενά.

Φ2 Δεν μπόρεσα να πάω. Είχε πολύ κόσμο;

Φ1 151 άτομα.

Φ2 Σώπα ρε θηρίο τα μέτρησες ένα, ένα;

Φ1 Όχι βέβαια. Ήξερα από πρίν ότι το αμφιθέατρο είχε 150 θέσεις. Όταν λοιπόν μπήκα μέσα με την γυναίκα μου, είχε μόνο δυο άδεια καθίσματα, και λίγο αργότερα ήρθε άλλος ένας ο οποίος παρακολούθησε όρθιος την εκδήλωση. Άρα σύνολο 151!

Φ2 Τέλεια! Έχεις συλλάβει τον ορισμό που έδωσε ο Κάντορ το 1895 ,ο πατέρας της θεωρίας συνόλων στα μαθηματικά, για την ισοπληθικότητα δυο συνόλων. Δυο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων όταν μεταξύ τους υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία.

Φ1 Εγώ μίλησα για θεατές και καθίσματα. Τι ποιο φυσιολογικό από το να πείς πως αφού δεν περισσεύει ούτε άνθρωπος ούτε καρέκλα, οι άνθρωποι θα είναι όσες και οι καρέκλες. Τι είναι αυτά τα ένα προς ένα και επί; Γιατί εσείς οι μαθηματικοί θέλετε να περιπλέκεται τα πράγματα;

Φ2 Το να χρησιμοποιούμε μια ποιο τεχνητή και ακριβολόγα γλώσσα, το ξέρεις πολύ καλά ότι δεν αποτελεί περιπλοκή αλλά απεναντίας μας δίνει την δυνατότητα να έχουμε κάποιες ευελιξίες όταν συλλογιζόμαστε για ένα αντικείμενο, και ειδικά όταν αναζητούμε τη λογική σχέση που έχουν μεταξύ τους οι προτάσεις που αφορούν το υπο μελέτη αντικείμενο. Στην φυσική γλώσσα που εκφράστηκες εσύ, το ότι η αντιστοιχία είναι ένα προς ένα σημαίνει ότι σε διαφορετικούς ανθρώπους, αντιστοιχούν διαφορετικά καθίσματα, ενώ ότι είναι επί, σημαίνει ότι σε κάθε κάθισμα αντιστοιχεί ένας τουλάχιστον άνθρωπος.

Φ1 Καλά, περιμέναμε τον Κάντορ να μας πει αυτό που εγώ βρήκα χωρίς κόπο; Ποιο πριν δηλαδή οι άνθρωποι δεν γνωρίζανε αυτό τον ορισμό ισοπληθυκότητας;

Φ2 Σαφώς και το γνωρίζανε ακόμα και προϊστορικοί πολιτισμοί, όπως μαρτυρούν πολλά αρχαιολογικά ευρήματα. Ο Κάντορ όμως πήρε αυτό τον ορισμό και τον οδήγησε στο έσχατο σημείο των συνεπειών του.

Φ1 Δηλαδή;

Φ2 Προηγουμένως ανέφερες ότι ο ορισμός αυτός είναι τόσο προφανής και εύλογος που κανένας άνθρωπος δεν θα διαφωνούσε γι' αυτόν. Συμφωνείς;

Φ1 Το είπα και το εννοώ.

Φ2 Ωραία, και τώρα πες μου, ποιο πολλοί είναι όλοι οι φυσικοί αριθμοί , ή όλοι οι άρτιοι αριθμοί.

Φ1 Δίχως σκέψη όλοι οι φυσικοί. Οι φυσικοί είναι το 1,2,3,4,5,6,7,8,9,…. ενώ οι άρτιοι το 2,4,6,8,… Προφανώς υπάρχουν φυσικοί που δεν είναι άρτιοι, όπως για παράδειγμα ο 3, ή ο 5. Άρα οι φυσικοί είναι περισσότεροι.
Φ2 Πρόσεξε τι έχεις κάνει τώρα. Απ' την μια συμφώνησες, θεωρώντας το μάλιστα προφανές, ότι δυο σύνολα αντικειμένων έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων όταν μεταξύ τους υπάρχει μια ένα προς ένα και επί συνάρτηση. Θα μου επιτρέψεις , αντί για την λέξη αντιστοιχία να χρησιμοποιήσω όπως το συνηθίζουν οι μαθηματικοί, την λέξη συνάρτηση. Απ' την άλλη μεριά, ξεχνώντας τον προσυμφωνημένο ορισμό, η διαίσθησή σου, με βάση το γεγονός ότι οι άρτιοι αποτελούν υποσύνολο των φυσικών, σε οδηγεί να ισχυριστείς ότι οι φυσικοί είναι περισσότεροι σε πλήθος.

Φ1 Σωστά. Τι το περίεργο βλέπεις;

Φ2 Τελικά την ισοπληθυκότητα των δυο συνόλων πώς θα την κρίνουμε; Με βάση τον ορισμό που δώσαμε, ή με βάση τις εκάστοτε διαισθήσεις μας;

Φ1 Γιατί , το ένα αναιρεί το άλλο, οδηγώντας σε διαφορετικές εκτιμήσεις;

Φ2 Για κοίταξε. Αν σε κάθε φυσικό αριθμό , αντιστοιχίσω το διπλάσιό του, δεν θα έχω μια ένα προς ένα και επί συνάρτηση, ανάμεσα στα δυο σύνολα;

Φ1 Για να το σκεφτώ. Στο 1 αντιστοιχεί το 2, στο 2 το 4, στο 3 το 6, στο χ το 2χ. Σίγουρα η συνάρτηση είναι ένα προς ένα. Αν τώρα πάρω κάποιον άρτιο λ.χ. τον 16 τότε αυτός προέρχεται από το 8 με βάση την αντιστοιχία μας. Δηλαδή η συνάρτηση είναι και επί. Και τελικά τι; Οι άρτιοι είναι όσοι και οι περιττοί;

Φ2 Αυτό είναι το αναπόδραστο συμπέρασμα που βγαίνει, με βάση τον ορισμό που δώσαμε.

Φ1 Κι έτσι ενώ ο ορισμός στην περίπτωση των ανθρώπων με τις καρέκλες ,είναι το ποιο λογικό πράγμα που μπορεί να σκεφτεί κανείς, στην περίπτωση των αριθμών καταλήγει να μας δίνει παράδοξα αποτελέσματα, τα οποία όμως πρέπει να τα δεχτούμε ως αληθινά.

κείμενο: Γ. Κασαπίδης

Φ2 Βασικά η παραδοξότητα εμφανίζεται όταν εφαρμόζουμε τον ορισμό μας σε σύνολα που έχουν άπειρα στοιχεία. Στην περίπτωση που έχουμε πεπερασμένα σύνολα, όπως το παράδειγμά σου με τις 150 θέσεις του αμφιθεάτρου, τα πάντα είναι σύμφωνα με τις διαισθήσεις μας. Κατά την μετάβαση από το πεπερασμένο στο άπειρο η διαίσθησή μας, δυστυχώς δεν ακολουθεί την λογική μας.

Φ1 Αυτό που δείχνει το αποτέλεσμά μας, είναι ότι οι άρτιοι είναι όσοι και οι φυσικοί. Αφού και τα δυο σύνολα έχουν άπειρα στοιχεία, τώρα που το σκέφτομαι έτσι είναι λογικό να είναι ισοπληθή, έστω κι αν το ένα είναι υποσύνολο του άλλου.

Φ2 Και πώς είσαι σίγουρος ότι για δυο σύνολα που έχουν άπειρα στοιχεία, το άπειρο πλήθος του ενός είναι ίδιο με το άπειρο πλήθος του άλλου;

Φ1 Μη μου πεις ότι υπάρχουν και διαβαθμίσεις του απείρου.

Φ2 Ακριβώς αυτό είναι ένα μέρος της πρωτοποριακής εργασίας του Κάντορ.

Εν τω μεταξύ είχαμε φτάσει στο Μπαρόκ και ανεβήκαμε τα σκαλιά που οδηγούσαν στο πατάρι. Ο Φ3 ήταν ήδη εκεί, και τον είδαμε να είναι σκυμμένος πάνω από κάποιο βιβλίο κρατώντας σημειώσεις , πράγμα πολύ συνηθισμένο γι' αυτόν, πάνω σε μια στοίβα χαρτιά. Μετά τις συστάσεις καθίσαμε κι εμείς. Κοίταξα να δω τι διαβάζει.

Φ2 Λοιπόν Φ1 είσαι τυχερός. Ο φίλος μας μελετάει ακριβώς αυτά που συζητούσαμε πριν από λίγο.

Φ1 Εγώ ήρθα εδώ, γιατί ο Φ2 μου είπε πως συζητάτε για το θεώρημα του Γκέντελ. Μην με ζαλίζετε με άλλα πράγματα.

Φ3 Η κατανόηση αυτού του θέματος, είναι δύσκολη υπόθεση, ακόμη και για έναν μαθηματικό. Αν πραγματικά ενδιαφέρεσαι, θα πρέπει να έχεις την υπομονή και την επιμονή να γνωρίσεις κάποια ζητήματα που μπορούμε να πούμε πως είναι προαπαιτούμενα του θεωρήματος.

Φ1 Τώρα που μπήκα στο χορό, θα χορέψω. Καθώς ερχόμασταν με τον Φ2 μιλούσαμε για το έργο του Κάντορ. Ομολογώ πώς πήρα το πρώτο μου ξάφνιασμα διαπιστώνοντας ότι οι άρτιοι αριθμοί που αποτελούν μέρος των φυσικών, είναι ισοπληθείς με τους φυσικούς.

Φ3 Αυτός είναι και ένας τρόπος για να διαπιστώσουμε ότι ένα σύνολο είναι άπειρο. Συγκεκριμένα ο Κάντορ έδειξε ότι ένα σύνολο είναι άπειρο ακριβώς όταν μπορεί να αντιστοιχιστεί ένα προς ένα με ένα γνήσιο υποσύνολό του.

Φ2 Νομίζω ότι οι σημειώσεις που κρατάς είναι ότι πρέπει για ξεκίνημα. Ας ξεκινήσουμε να τις διαβάζουμε σχολιάζοντάς τες όποτε είναι αναγκαίο.

κείμενο: Γ. Κασαπίδης

Στοιχεία Θεωρίας συνόλων και απείρων αριθμών

Ο όρος "άπειρο" ανήκει αυτός καθ' εαυτόν στη φιλοσοφία. Στα Μαθηματικά παρουσιάζεται υπο δυο εκφάνσεις: Το "εν δυνάμει άπειρο" και το "εν ενεργεία άπειρο". Η πατρότητα αυτών των όρων αποδίδεται στον Αριστοτέλη το Σταγειρίτη (384-322 π.Χ.) και η διάκρισή τους συνίσταται στα ακόλουθα:

Το μεν "εν δυνάμει άπειρο" αφορά μια μεταβλητή ποσότητα η οποία γίνεται άπειρη, δηλαδή ενώ παραμένει διαρκώς πεπερασμένη, δύναται να γίνει μεγαλύτερη απο μια τυχαία, αλλά ορισμένη θετική ποσότητα, οσοδήποτε μεγάλη. Για παράδειγμα η μεταβλητή ν η οποία παίρνει τιμές απο το σύνολο $N=\{1,2,\ldots,\nu,\ldots\}$ όλων των φυσικών αριθμών, γίνεται απείρως μεγάλη. Στην κατηγορία του "εν δυνάμει απείρου" ανήκει και η περίπτωση κατα την οποία μια μεταβλητή ποσότητα μπορεί να γίνει απείρως μικρή, όπως λ.χ. η ποσότητα $\frac{1}{\nu}$, όπου το ν διατρέχει το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Το "εν ενεργεία άπειρο" αφορά μια σταθερή ποσότητα, η οποία είναι άπειρη, όπως για παράδειγμα, όταν αναφερόμαστε στο σύνολο $N=\{1,2,3,\ldots\}$ όλων των φυσικών αριθμών, απο την άποψη του "πλήθους" των στοιχείων αυτού.

Μαθηματικοί και φιλόσοφοι παλεύουν με τις έννοιες του απείρου και των απειροσυνόλων απο τις μέρες των αρχαίων Ελλήνων και τα παράδοξα του Ζήνωνα (450 π.Χ.) είναι μια απο τις πρώτες ενδείξεις για τις δυσκολίες που αντιμετωπίστηκαν.

Ο ίδιος ο Αριστοτέλης αρνείται την ύπαρξη του "εν ενεργεία" απείρου, ενώ κατά την διάρκεια του Μεσαίωνα βρέθηκε ότι η αποδοχή του ενεργού απείρου οδηγεί σε παράδοξα στην Γεωμετρία. Για παράδειγμα, τα σημεία δυο ομόκεντρων κύκλων, μπορούν

1.

να τεθούν σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία, θεωρώντας τα σημεία τομής τους με μια κοινή ακτίνα τους, ενώ φαίνεται ότι η περιφέρεια της μεγαλύτερης ακτίνας περιέχει περισσότερα σημεία.

Μπροστά σε μια παραδοξότητα απορρέουσα από την αποδοχή του εν ενεργεία απείρου, βρέθηκε και ο Γαλιλαίος (1638) παρατηρώντας ότι οι θετικοί ακέραιοι μπορούν να αντιστοιχιστούν ένα προς ένα με τα τετράγωνά τους, ενώ το σύνολο των τετραγώνων των φυσικών αριθμών είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του συνόλου όλων των φυσικών. Για να αποφευχθούν τα παράδοξα αυτά, συμπέρανε ο Γαλιλαίος, πρέπει να απορριφθεί η ιδέα του ολοκληρωμένου απειροσυνόλου.

Ο Γκάους, σ' ένα γράμμα του προς τον Σουμάχερ το 1831 γράφει: " Διαμαρτύρομαι για την χρήση μιας άπειρης ποσότητας ως πραγματικής: αυτό στα μαθηματικά δεν επιτρέπεται ποτέ. Το άπειρο είναι μόνο ένας τρόπος του λέγειν κατά τον οποίο μπορεί κανείς να μιλάει για τα όρια στα οποία ορισμένοι λόγοι μπορούν να πλησιάσουν όσο κοντά θέλουμε, ενώ άλλοι μπορούν να αυξάνονται απεριόριστα ".

Ο Κωσύ, επίσης αρνήθηκε την ύπαρξη εν ενεργεία άπειρων συνόλων στηριζόμενος στην παράδοξη βάση ότι ένα τέτοιο σύνολο μπορεί να τεθεί σε ένα προς ένα αντιστοιχία με ένα γνήσιο υποσύνολό του.

Ο Μπολτζάνο (1781-1848) ήταν ο πρώτος που έκανε θετικά βήματα προς την παραδοχή ότι υπάρχουν πραγματικά τα άπειρα σύνολα. Υποστήριζε μάλιστα ότι το γεγονός ότι ένα άπειρο σύνολο μπορεί να τεθεί σε ένα προς ένα αντιστοιχία με ένα γνήσιο υποσύνολό του πρέπει απλώς να γίνει αποδεκτό ως γεγονός. Ωστόσο το έργο του Μπολτζάνο αν και ριζοσπαστικό ήταν στο σύνολό του μάλλον φιλοσοφικό παρά μαθηματικό.

Μια αληθινή μαθηματική μελέτη των άπειρων συνόλων έγινε σε μια συστηματική εργασία του G. Cantor προς το τέλος του δέκατου ένατου αιώνα.

2.

Αυτήν την μελέτη, που έμελλε να διαποτίσει με τα αποτελέσματά της όλα σχεδόν τα Μαθηματικά του αιώνα μας, θα επιχειρήσουμε να παρουσιάσουμε παρακάτω.

Τα Μαθηματικά θεωρούν την έννοια του συνόλου ως πρωταρχική, κάτι ανάλογο π.χ. με τις έννοιες του σημείου, της ευθείας του, επιπέδου και του χώρου στη Γεωμετρία. Ο Κάντορ την περιέγραψε ως εξής: « Με τη λέξη "σύνολο" εννοούμε μια οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα σαφώς ορισμένων και διακεκριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας ».

Όσο ασαφής κι αν είναι αυτός ορισμός, συνεπάγεται δύο βασικές ιδιότητες: 1. Κάθε σύνολο A έχει στοιχεία ή μέλη. Γράφουμε

$x \in A \Longleftrightarrow$ το αντικείμενο x είναι μέλος (ή ανήκει στο) A

2. Ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του, δηλαδή αν A, B είναι δύο σύνολα τότε

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \Longleftrightarrow x \in B].$$

Αυτό το τελευταίο λέγεται ιδιότητα της έκτασης.

Δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα (μοναδικό σύμφωνα με την (2)) σύνολο που δεν έχει στοιχεία. Το σύνολο αυτό το ονομάζουμε κενό σύνολο και το συμβολίζουμε με ϕ.

Αν A, B είναι σύνολα, τότε λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B, όταν κάθε στοιχείο του A, ανήκει και στο B. Συμβολικά

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow (\forall x)[x \in A \Longrightarrow x \in B]$$

Αν το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B γράφουμε $A \subsetneq B$ και είναι $A \subsetneq B \Longleftrightarrow [A \subseteq B$ και $A \neq B]$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A.$$

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι τα στοιχεία ενός συνόλου γράφουμε $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$.

3

Ας είναι $f: X \to \Psi$ μια συνάρτηση και $A \subseteq X$
Ορίζομε $f[A] = \{ f(x) \,/\, x \in A \}$ (η εικόνα του A από την f)
Αν $B \subseteq \Psi$ τότε ορίζομε:
$f^{-1}[B] = \{ x \in X \,/\, f(x) \in B \}$ (η αντίστροφη εικόνα του B από την f)

Όταν η f είναι ένα προς ένα και επί, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση $f^{-1}: \Psi \to X$ που λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f, από την σχέση: $f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$.

Η σύνθεση δύο συναρτήσεων $f: A \to B$, $g: B \to \Gamma$ είναι μια νέα συνάρτηση $h: A \to \Gamma$ που ορίζεται από την σχέση $h(x) = g(f(x))$ (συμβολικά γράφομε $h = g \circ f$ δηλ. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$)

Αν $A \subseteq X$ το συμπλήρωμα του A ως προς X είναι το σύνολο $X - A$. Συμβολικά $CA = A' = X - A$.
Παραθέτομε τώρα έναν κατάλογο βασικών ιδιοτήτων για τις πράξεις των συνόλων που ορίσαμε και τις συναρτήσεις:

$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$, $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$

$f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$

$f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$

$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Αν f μονομορφισμός τότε i) $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$
ii) $f[A - B] = f[A] - f[B]$, iii) $f[\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k] = \bigcap_{k=1}^{\infty} f[A_k]$.

5

Φ1 Στοπ ρε παιδιά. Τα πράγματα παρά έγιναν τεχνικά για να μπορώ να τα παρακολουθήσω.

Φ2 Μην σε στεναχωρεί αυτό. Τώρα ξεκινάει η ουσία του θέματος.

Φ3 Ο Φ2 νομίζει ότι επειδή αυτός ξημερωβραδιάζει με αυτές τις έννοιες , αυτές θα φαίνονται το ίδιο προφανείς και σε όλους τους άλλους. Πάντως όταν έχεις απορίες μη διστάσεις να μας σταματήσεις. Έχεις δίκαιο ότι η τελευταία σελίδα ήταν πολύ πυκνογραμμένη. Ας προχωρήσουμε όμως.

Λέμε πολλές φορές ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών, το σύνολο των ρητών αριθμών και το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι απειροσύνολα, δηλαδή περιέχουν άπειρου πλήθους στοιχεία. Το φυσιολογικό ερώτημα που τίθεται αμέσως, είναι αν το άπειρο μέγεθος του καθενός από τα παραπάνω σύνολα είναι ίδιο, δηλαδή αν οι ρητοί λχ είναι σε πλήθος όσοι και οι φυσικοί ή οι πραγματικοί.

Πριν από τη μελέτη του Κάντορ, οι μαθηματικοί γνώριζαν μόνο ένα άπειρο, που συμβολιζόταν με ∞, κι αυτό το σύμβολο χρησιμοποιούσαν χωρίς διάκριση για να παραστήσει τον «αριθμό» των στοιχείων κάποιου συνόλου σαν κι αυτά που αναφέρθηκαν παραπάνω. Με την εργασία του Κάντορ εκτέθηκε μια εντελώς νέα άποψη και επιτεύχθηκε μια κλίμακα και μια αριθμητική των απείρων.

<u>Ορισμός:</u> Δυο σύνολα Α, Β (λέμε ότι) είναι ισοπληθικά ή ισοδύναμα ή ίσα σε πλήθος αν υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία των στοιχείων τους.
Συμβολικά $A =_c B \overset{\text{ορ.}}{\iff} (\exists f)[f: A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B]$
(χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό $A \sim B$).

Ο παραπάνω ορισμός είναι εύλογος στην περίπτωση που τα A, B είναι πεπερασμένα. Έστω λχ. ότι A είναι το σύνολο των μαθητών μιας τάξης και B το σύνολο των καρεκλών της τάξης. Για να συγκρίνουμε τα μεγέθη των A και B μπορούμε να βάλουμε τους μαθητές να καθίσουν ο καθένας σε μια καρέκλα. Αν δεν περισσέψει καμιά καρέκλα και όλοι οι μαθητές είναι καθισμένοι τότε $A \sim B$. Αν περισσέψουν μαθητές, αυτό θα σημαίνει ότι το πλήθος των μαθητών είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των καρεκλών $A >_c B$, ενώ αν περισσέψουν καρέκλες αυτό θα σημαίνει ότι $A <_c B$.

6

Η συμβολή του Κάντορ βρίσκεται στο γεγονός, ότι αντιλήφθηκε την σημασία της αρχής της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας και στο κουράγιο με το οποίο την οδήγησε μέχρι τις ακραίες συνέπειές της αποδεχόμενος την ισχύ της ακόμη και στην περίπτωση των απειροσυνόλων.

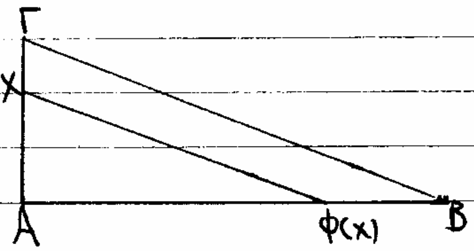
Ορισμός 2 Σε κάθε σύνολο A αντιστοιχούμε ένα σύμβολο $|A|$ που το λέμε <u>πληθάριθμο</u> του A, έτσι ώστε δυο σύνολα να έχουν σαν αντίστοιχό τους το ίδιο σύμβολο ακριβώς όταν είναι ισοδύναμα.
Δηλ. $|A| = |B| \iff A \underset{c}{=} B \iff A \sim B$

Παραδείγματα: 1. Έστω $A = \{2, 4, 6, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ τότε η συνάρτηση $\mathbb{N} \ni \nu \mapsto 2\nu \in A$ είναι ένα προς ένα και επί, οπότε $|A| = |\mathbb{N}|$ ενώ $A \subsetneq \mathbb{N}$.

2. Αν $T = \{1, 4, 9, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to T$ με $f(\nu) = \nu^2$ είναι 1-1 και επί, οπότε $|T| = |\mathbb{N}|$

3. $(0,1) \underset{c}{=} (0,2)$ πράγματι η συνάρτηση $\phi : (0,1) \to (0,2)$ με $\phi(x) = 2x$ είναι 1-1 και επί.

4. Όλα τα ευθύγραμμα τμήματα περιέχουν το ίδιο "πλήθος" σημείων. Πράγματι ας είναι AB, $A\Gamma$ δυο ευθ. τμήματα, τοποθετημένα όπως στο διπλανό σχήμα. Η συνάρτηση $\phi : A\Gamma \to AB$ όπου $\phi(x)$ σημείο του AB ώστε $x\phi(x) \,//\, B\Gamma$ είναι προφανώς 1-1 και επί.



Παρατήρηση 1. Κατά τον Κάντορ πληθάριθμος είναι ότι απομένει

7

απο ένα σύνολο αν αφαιρέσουμε την φύση των στοιχείων του και τη διάταξή τους. Για να δείξει μάλιστα αυτή την διπλή αφαίρεση συμβόλισε τον πληθάριθμο με $\overline{\overline{A}}$. Έτσι σύμφωνα με το σύγχρονο συμβολισμό που ακολουθούσαμε εμείς είναι $\overline{\overline{A}} = |A|$.

2. Το κοινό χαρακτηριστικό των πεπερασμένων ισοδυνάμων συνόλων είναι το πλήθος των στοιχείων τους. Στην περίπτωση αυτή ο πληθάριθμος του συνόλου είναι ένας φυσικός αριθμός που δείχνει το πλήθος των στοιχείων του.

3. Συχνά τον πληθάριθμο ενός συνόλου τον ονομάζουμε και δύναμη ή ισχύ του συνόλου.

ορισμός: Το σύνολο A είναι μικρότερο-ίσο του B (ως προς το πλήθος) αν είναι ισοπληθικό με κάποιο υποσύνολο του B.
συμβολικά $A \leq_c B \Leftrightarrow (\exists \Gamma)[\Gamma \subseteq B$ και $A =_c \Gamma]$
ή $|A| \leq |B| \Leftrightarrow (\exists \Gamma)[\Gamma \subseteq B$ και $|A| = |\Gamma|]$

• **Πρόταση:** $|A| \leq |B| \Leftrightarrow (\exists f)[f : A \rightarrowtail B]$

απόδειξη

Αν $|A| = |\Gamma|$ όπου $\Gamma \subset B$ και η $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \Gamma$ φανερώνει αυτή την ισοδυναμία τότε η f είναι ένας μονομορφισμός απο το A στο B. Αντιστρόφως αν υπάρχει $f : A \rightarrowtail B$ τότε $A =_c f[A] \subseteq B$ δηλαδή $|A| \leq |B|$.

Είναι εύκολο να δούμε οτι:

$A \leq_c A$

$A \leq_c B$ και $B \leq_c \Gamma \Rightarrow A \leq_c \Gamma$

Δηλαδή η σχέση $\leq_c$ είναι σχέση διάταξης. (βλ. 22 σελ.)

8

ορισμός: Ένα σύνολο λέγεται πεπερασμένο, αν υπάρχει φυσικός αριθμός n, ώστε

$$A =_c \{ i / i < n \} = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Διαφορετικά το A λέγεται άπειρο.

Παρατήρηση: Το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι πεπερασμένο, αφού

$$\emptyset \sim \{ i / i < 0 \}.$$

Το σύνολο A λέγεται αριθμήσιμο (ή απαριθμητό) αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Αλλιώς το A λέγεται υπεραριθμήσιμο (ή αναπαρίθμητο ή μη αριθμήσιμο).

Πρόταση: Ένα σύνολο A είναι αριθμήσιμο τότε και μόνο τότε όταν $A = \emptyset$ ή το A δέχεται απαρίθμηση, δηλαδή υπάρχει επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \to A$, ώστε $A = \{\pi(0), \pi(1), \pi(2), \dots\}$.

απόδειξη

Έστω ότι το A είναι άπειρο αριθμήσιμο. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει αντιστοιχία $\pi : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow A$. Αν το A είναι πεπερασμένο μη κενό, τότε υπάρχει αντιστοιχία $f : \{ i / i < n \} \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow A$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$ ορίζουμε την απαρίθμηση π, ως εξής

$$\pi(i) = \begin{cases} f(i), & \text{αν } i < n \\ f(0), & \text{αν } i \geq n. \end{cases}$$

Αντίστροφα, έστω A μη πεπερασμένο και $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$, απαρίθμηση του A. Πρέπει να κατασκευάσουμε μια απαρίθμηση $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ δίχως επαναλήψεις, ώστε η f είναι αντιστοιχία 1-1 και επί. Η λογική της κατασκευής αυτής είναι απλώς να διαγράψουμε τις επαναλήψεις από την απαρίθμηση π.

Ποιο συγκεκριμένα ορίζουμε την f αναδρομικά ως εξής:

9

κείμενο: Γ. Κασαπίδης

Επειδή το A δεν είναι πεπερασμένο, για κάθε ακολουθία $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ στοιχείων του A, υπάρχει κάποιο m έτσι ώστε $\pi(m) \notin \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Θέτουμε:

$f(0) = \pi(0)$,

$m_n =$ το ελάχιστο $m > n$ ώστε $\pi(m) \notin \{f(0), \ldots, f(n)\}$,

$f(n+1) = \pi(m_n)$

Η f είναι 1-1 και αρκεί να δείξουμε ότι είναι και επί, δηλαδή κάθε $x \in A$ είναι τιμή της.

Αν $x = \pi(0)$ τότε εξ ορισμού $x = f(0)$.

Έστω $x = \pi(n+1)$. Αν $x \in \{f(0), \ldots, f(n)\}$ τότε $x = f(i)$ για κάποιο $i \le n$ και αν $x \notin \{f(0), \ldots, f(n)\}$ τότε εξ ορισμού $m_n = n+1$ και $f(n+1) = \pi(m_n) = x$.

• **Πρόταση:** Κάθε υποσύνολο αριθμήσιμου συνόλου είναι αριθμήσιμο.

απόδειξη

Έστω A σύνολο αριθμήσιμο και $\Gamma \subset A$.

Τότε υπάρχει $\phi: A \twoheadrightarrow \mathbb{N}$, 1-1 και επί.

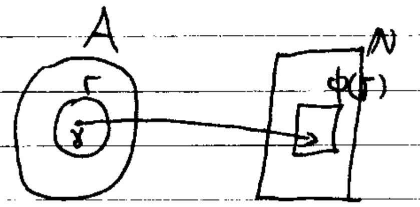
ορίζουμε έναν επιμορφισμό

$\pi: \mathbb{N} \to \Gamma$ ως εξής:

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

$\pi(\nu) = \phi^{-1}(\nu)$ όταν $\nu \in \phi[\Gamma]$

$\pi(\nu) = \gamma =$ κάποιο σταθερό στοιχείο το Γ, όταν $\nu \notin \phi[\Gamma]$



• <u>Άσκηση:</u> Αν το A είναι αριθμήσιμο και υπάρχει μονομορφισμός $f: B \rightarrowtail A$, τότε το B είναι επίσης αριθμήσιμο.

• <u>Άσκηση:</u> Αν το A είναι αριθμήσιμο και υπάρχει επιμορφισμός $f: A \twoheadrightarrow B$ τότε και το B είναι αριθμήσιμο.

10

Θεώρημα: (Πρώτη διαγώνιος μέθοδος του Cantor)
Για κάθε ακολουθία $A_0, A_1, A_2, \dots$ απαριθμητών συνόλων η ένωση $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \cup A_1 \cup \dots$ είναι επίσης απαριθμητό σύνολο.

απόδειξη

Αφού τα A_n είναι απαριθμητά σύμφωνα με προηγούμενη πρόταση θα είναι $A_n = \emptyset$ ή θα υπάρχει επιμορφισμός $\pi^n : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A_n$. Ας υποθέσουμε ότι $A_n \neq \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$
(Αν $A_k = \emptyset$ για κάποιο k τότε απλά το παραλείπουμε από την ακολουθία, αφού η ένωσή του με τα άλλα σύνολα δεν μεταβάλλει το σύνολο A).
Θέτουμε $\pi^n(i) = \alpha_i^n$ οπότε για κάθε n, έχουμε:

$$A_n = \{\alpha_0^n, \alpha_1^n, \alpha_2^n, \dots\}$$

κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα

$$\begin{array}{lccccc}
A_0 : & \alpha_0^0 & \alpha_1^0 & \alpha_2^0 & \alpha_3^0 & \dots \\
A_1 : & \alpha_0^1 & \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 & \dots \\
A_2 : & \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \dots \\
\vdots & & & & & \\
\vdots & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Μπορούμε να ορίσουμε μια απαρίθμηση του A, ακολουθώντας τα βέλη στο παραπάνω διάγραμμα:
Είναι: $A = \{\alpha_0^0, \alpha_0^1, \alpha_1^0, \alpha_0^2, \alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots\}$

ορίσαμε δηλαδή μια απαρίθμηση του A οπότε το A θα είναι απαριθμητό σύνολο.

11

κείμενο: Γ. Κασαπίδης

Πόρισμα 1. Το σύνολο των ακέραιων αριθμών $\mathbb{Z}$, είναι αριθμήσιμο.

απόδειξη

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3, \ldots\}$. Το σύνολο των αρνητικών ακεραίων είναι αριθμήσιμο μέσω της αντιστοιχίας $x \mapsto -(x+1)$.

Πόρισμα 2: Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

απόδειξη

Το σύνολο $\mathbb{Q}^+$ των μη αρνητικών ρητών, είναι αριθμήσιμο διότι $\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N} \}$

και κάθε $\{ \frac{m}{n} / m \in \mathbb{N} \}$ είναι αριθμήσιμο μέσω της αντιστοιχίας $(m \mapsto \frac{m}{n})$. Όμοια και το σύνολο $\mathbb{Q}^-$ των αρνητικών ρητών είναι αριθμήσιμο, οπότε και η ένωση αυτών θα είναι αριθμήσιμη, δηλαδή το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

- Το αποτέλεσμα του πορίσματος 2 ακόμη και σήμερα, θεωρείται κάπως παράδοξο από τους πρωτόπειρους στην συνολοθεωρία, δεδομένου ότι το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό σύνολο, δηλαδή μεταξύ δυο ρητών περιέχονται άπειροι άλλοι ρητοί, και μάλιστα $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Q}$.

12

Το επόμενο βήμα του Cantor ήταν η απόδειξη ότι υπάρχουν και αναπαρίθμητα σύνολα, δηλαδή σύνολα με "πληθάριθμο" μεγαλύτερο από αυτόν των φυσικών αριθμών.

Θεώρημα: Το σύνολο των ακολουθιών πραγματικών αριθμών είναι μη αριθμήσιμο.

απόδειξη

(Το δεύτερο διαγώνιο επιχείρημα του Cantor).

Έστω ότι το σύνολο των ακολουθιών είναι αριθμήσιμο. Τότε θα υπάρχει απαρίθμησή τους, έστω η εξής:

$a_n^1, a_n^2, a_n^3, \dots$

Εποπτικότερα είναι:

$$
\begin{array}{lcllll}
a^1 & : & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots \\
a^2 & : & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots \\
a^3 & : & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \dots
\end{array}
$$

Ορίζουμε την ακολουθία $B_m = a_m^m + 1$

Πρέπει να υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, ώστε $B_m = a_m^k$

Δηλαδή:

$a_m^k = a_m^m + 1$. Ειδικότερα θέτοντας $m = k$ έχουμε: $a_k^k = a_k^k + 1 \iff 0 = 1$ άτοπο.

Άρα το σύνολο των ακολουθιών δεν είναι αριθμήσιμο.

Το επόμενο θεώρημα, ήταν το πρώτο αποτέλεσμα για την εννοική αποδοχή της θεωρίας του Cantor από την μαθηματική κοινότητα. Συγκεκριμένα ο Cantor μέσω της πληθικότητας του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, απέδειξε ότι υπάρχουν υπερβατικοί αριθμοί, και μάλιστα υπεραριθμήσιμου "πλήθους".

Απόδειξη για την ύπαρξη υπερβατικών αριθμών είχε δώσει νωρίτερα ο Liouville. Η απόδειξή του όμως ήταν δύσκολη και αναφερόταν σε κάποιας ειδικής μορφής αριθμούς. Ο Cantor έδειξε κάτι πολύ πιο ισχυρό (ότι "σχεδόν όλοι" οι πραγματικοί είναι υπερβατικοί) χρησιμοποιώντας μόνο την ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών.

Θα δώσουμε παρακάτω δυο αποδείξεις για το μη αριθμήσιμο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Θεώρημα: Το σύνολο $[0,1]$ όλων των πραγματικών που περιέχονται μεταξύ του 0 και του 1, δεν είναι αριθμήσιμο.

απόδειξη 1η

Προφανώς $\left\{\frac{1}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subset (0,1)$ άρα

$$\left|\left\{\frac{1}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}\right| \leq |(0,1)|.$$ Θα δείξουμε ότι δεν μπορεί να υφίσταται ισότητα στην παραπάνω ανίσωση. Εφόσον το $\left\{\frac{1}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ είναι αριθμήσιμο, αυτό θα δείχνει ότι το $(0,1)$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Έστω (απαγωγή σε άτοπο) ότι το $(0,1)$ είναι αριθμήσιμο, και $x_1, x_2, \ldots$ είναι μια αρίθμηση αυτού. Δηλαδή

$$(0,1) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

Κάθε αριθμός $x \in (0,1)$ έχει ένα μοναδικό δεκαδικό ανάπτυγμα, εκτός τους αριθμούς της μορφής $\frac{k}{10^n}$ που έχουν

14

Δυο δεκαδικά αναπτύγματα, ένα με άπειρα μηδενικά, και ένα με άπειρα εννιάρια. (π.χ. $\frac{4}{10^2} = 0,0400\ldots$ ή $\frac{4}{10^2} = 0,03999\ldots$)

Αν συμφωνήσουμε να μην χρησιμοποιούμε αναπτύγματα με άπειρα 9 τότε σε κάθε αριθμό αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα ένα δεκαδικό ανάπτυγμα. Έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$$x_1 = 0,x_1^1 x_1^2 x_1^3 \ldots$$
$$x_2 = 0,x_2^1 x_2^2 x_2^3 \ldots$$
$$x_3 = 0,x_3^1 x_3^2 x_3^3 \ldots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Όπου $x_j^i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ $\forall\, i,j \in \mathbb{N}^*$

Κατασκευάζουμε τώρα τον αριθμό $B \in (0,1)$ ως εξής

Αν $B = 0,B_1B_2B_3\ldots$ τότε

$$B_m = \begin{cases} 4 & \text{αν } x_m^m \neq 4 \\ 5 & \text{αν } x_m^m = 4 \end{cases}$$

Αφού $B \in (0,1)$ θα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε:

$B = x_k$. Άρα $B_k = x_k^k$ δηλαδή

$4 = x_k^k$ αν $x_k^k \neq 4$ ή $5 = x_k^k$ αν $x_k^k = 4$ άτοπο.

Καταλήξαμε σε άτοπο με την υπόθεση ότι το $(0,1)$ είναι αριθμήσιμο, άρα το $(0,1)$ δεν είναι αριθμήσιμο.

Πόρισμα: Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών δεν είναι αριθμήσιμο.

απόδειξη

Η συνάρτηση $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1-2x}{x(1-x)}$ είναι 1-1 και επί. Άρα $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$! δηλαδή το $(0,1)$

15

Φ1 ………έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο R των πραγματικών αριθμών!!! Αρχίζω να συνηθίζω πια τα παράδοξα αποτελέσματα.

κείμενο: Γ. Κασαπίδης

Φ3 Πρόσεξε βέβαια ότι παράδοξο δεν σημαίνει ότι είναι αντιφατικό , δηλαδή παράλογο, αποτέλεσμα. Απλά είναι κάτι που έρχεται σε σύγκρουση με τις διαισθήσεις μας.

Φ1 Οι δυο τελευταίες αποδείξεις μου έκαναν ιδιαίτερη εντύπωση! Έχουν κάτι το απλό ,και ταυτόχρονα έξυπνο στο στήσιμο. Κάτι το οποίο δεν περιέχουν οι περισσότερες από τις άλλες αποδείξεις που είδαμε, όπου τα αποτελέσματά τους ήταν λίγο πολύ αναμενόμενα , όταν κάποιος εξοικειωθεί κάπως με την λογική του ορισμού της ισοπληθυκότητας.

Φ2 Έχεις απόλυτο δίκαιο. Να λοιπόν που και τα μαθηματικά θεωρήματα έχουν ένα είδος αισθητικής. Η απλότητα , η λιτότητα καλύτερα να την πούμε, η εξυπνάδα και η συνεκτικότητα με την οποία δένουν μεταξύ τους οι διάφορες έννοιες, είναι από τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των όμορφων θεωρημάτων.

Φ3 Υπάρχει βέβαια εκτός το αισθητικό μέρος ,και κάτι ποιο ουσιαστικό που κάνει σπουδαίο ένα μαθηματικό αποτέλεσμα. Εισάγει μια μέθοδο διαπραγμάτευσης ενός είδους ερωτημάτων.

Φ2 Σωστά! Στην περίπτωσή μας εισάγει την λεγόμενη «διαγώνιο μέθοδο». Διαγώνιο μέθοδο χρησιμοποίησε και ο Γκέντελ αργότερα στο δικό του θεώρημα.

Φ1 Αν και βλέποντας τις προηγούμενες αποδείξεις αντιλαμβάνομαι περίπου πως λειτουργεί και γιατί λέγεται έτσι αυτή η μέθοδος, θα ήθελα να σταθούμε λίγο περισσότερο σ’ αυτήν.

Φ3 Θα σου παρουσιάσω άλλο ένα αγαπημένο μου παράδειγμα, που το οφείλουμε και πάλι στον Κάντορ. Θα δείξουμε ότι το σύνολο όλων των συνόλων με στοιχεία θετικούς ακέραιους (φυσικούς αριθμούς) δεν είναι αριθμήσιμο.
Πρόσεξε λοιπόν. Κατ΄ αρχήν τι σημαίνει να είναι ένα σύνολο αριθμήσιμο;

Φ1 Να μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε με τους φυσικούς αριθμούς, μέσω μιας ένα προς ένα και επί συνάρτησης.

Φ3 Ωραία! Αυτή η αντιστοιχία πρακτικά σημαίνει ότι μπορούμε να δώσουμε τα στοιχεία του συνόλου σαν μια ακολουθία αντικειμένων, δηλαδή σαν να τα βάζουμε σε μια λίστα με κάποια σειρά, πρώτο, δεύτερο τρίτο, κ.ο.κ. Ας πούμε ότι αυτή η λίστα Λ είναι η $Σ_1$,$Σ_2$, $Σ_3$, $Σ_4$,….. Κατανοητό;

Φ1 Ναι.

Φ3 Ορίζουμε τώρα ένα νέο σύνολο Δ από θετικούς ακεραίους , ως εξής:
Για κάθε θετικό ακέραιο ν, ν ανήκει στο Δ αν και μόνο αν ν δεν ανήκει στο $Σ_ν$.

Φ1 ;;;;

Φ3 Για να δούμε δηλαδή αν ο αριθμός ν ανήκει στο Δ, ελέγχουμε αν ο ν ανήκει στο $Σ_ν$. Αν ανήκει δεν βάζουμε τον ν στο Δ, αν όμως το ν δεν ανήκει στο $Σ_ν$ τότε προσθέτουμε το ν στο σύνολο Δ. Για παράδειγμα, αν τύχει να είναι $Σ_3$ το σύνολο των άρτιων αριθμών, τότε το 3 θα ανήκει στο Δ, αφού δεν είναι άρτιος και άρα δεν ανήκει στο $Σ_3$. (Είναι φανερό βέβαια πως το Δ καθορίζεται από την λίστα Λ. Διαφορετικές λίστες γενικά θα δίνουν και διαφορετικά σύνολα Δ.)

Φ1 Έτσι αν $Σ_7$ είναι τα πολλαπλάσια του 5 τότε το 7 θα ανήκει στο Δ, ενώ το 15 δεν θα ανήκει.

Φ2 Τέλεια. Νομίζω πως πρέπει να εγκαταλείψεις την φιλολογία και να ασχοληθείς με τα μαθηματικά.

Φ3 Η μέθοδος λέγεται διαγώνια γιατί συσχετίζουμε το ν-στο αριθμό με το ν-στο στοιχείο της λίστας. Για να γίνει ποιο σαφές αυτό, θεώρησε ότι κάθε αριθμός μ συσχετίζεται με το σύνολο $Σ_ν$ ανάλογα με το αν το μ ανήκει ή δεν ανήκει στο σύνολο $Σ_ν$. Τότε όλα τα δυνατά ζεύγη συσχετισμών μπορούν να αναπαρασταθούν με μια ορθογώνια διευθέτηση όπως αυτή που θα σχεδιάσω

	1	**2**	**3**	**4**	**……**
Σ1	1,Σ1	2,Σ1	3,Σ1	4,Σ1	…….
Σ2	1,Σ2	2,Σ2	3,Σ3	4,Σ4	…….
Σ3	1,Σ3	2,Σ3	3,Σ3	4,Σ3	……
Σ4	1,Σ4	2,Σ4	3,Σ4	4,Σ4	……
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	

Για τον ορισμό του Δ όπως βλέπεις επιλέξαμε μόνο τις συσχετίσεις (ν,Σν) που βρίσκονται πάνω στην διαγώνιο του παραπάνω πίνακα.

Φ1 Πιστεύω πως το έχω κατανοήσει. Μπορείς να συνεχίσεις.

Φ3 Το σύνολο Δ που ορίσαμε, είναι κι αυτό ένα σύνολο που αποτελείται από θετικούς ακέραιους. Αφού όμως θεωρήσαμε εξ' αρχής ότι όλα τα σύνολα με στοιχεία θετικούς ακέραιους τα ταξινομήσαμε στην λίστα Λ, το Δ θα πρέπει απαραιτήτως να βρίσκεται κι αυτό μέσα στην λίστα, δηλαδή πρέπει να είναι κάποιο από τα $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_3$,….

Φ1 Σωστά. Αφού όλα τα περιλαμβάνει η λίστα, θα περιέχει και το σύνολο Δ.

Φ3 Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιος αριθμός κ, έτσι ώστε $Δ=Σ_κ$.

Φ1 Σίγουρα.

Φ3 Και τώρα σε ρωτάω. Ο αριθμός κ ανήκει ή δεν ανήκει στο σύνολο Δ. Γιατί φυσικά ένα μόνο απ' τα δυο μπορεί να συμβαίνει. Ή θα είναι στοιχείο του Δ, ή δεν θα είναι στοιχείο του Δ, και τρίτη εκδοχή δεν υπάρχει.

Φ1 Ε βέβαια. Όπως έλεγε και ο Αριστοτέλης, από δυο αντιφατικές μεταξύ τους προτάσεις μόνο η μια μπορεί να είναι αληθής. Αυτή είναι η « αρχή του αποκλεισμού του τρίτου».

Φ3 Απάντησε όμως σε παρακαλώ σ' αυτό που σε ρώτησα, και μην υπεκφεύγεις.

Φ1 Εντάξει. Για να δούμε. Χμ! Αν το κ ανήκει στο Δ τότε δεν θα ανήκει στο $Σ_κ$. Όμως $Δ=Σ_κ$, άτοπο. Άρα το βρήκα! Το κ δεν ανήκει στο Δ.

Φ2 Αν όμως το κ δεν ανήκει στο Δ, τότε θα ανήκει στο $Σ_κ$. Τότε και πάλι αφού $Δ=Σ_κ$, καταλήγουμε σε άτοπο!

Φ1 Σατανικό! Τελικά καταλήγουμε σε αδιέξοδο όποιο δρόμο και να πάρουμε.

Φ3 Επομένως, σύμφωνα με την μέθοδο απαγωγή σε άτοπο, η αρχική μας υπόθεση, ότι το σύνολο όλων των συνόλων από θετικούς ακεραίους , είναι αριθμήσιμο , πρέπει να απορριφθεί. Όπερ έδει δείξαι.

Φ1 Φανταστικό! Ομολογώ πως με μάγεψε αυτή η απόδειξη. Αρχίζω να καταλαβαίνω γιατί οι μαθηματικοί παθιάζονται με τέτοιου είδους καταστάσεις.
Φ3 Να συνεχίσουμε λίγο ακόμη την ανάγνωση των σημειώσεών μου;

Φ2 Το συζητάς κιόλας. Δεν βλέπεις πώς μερακλώθηκε ο Φ1;

κείμενο: Γ. Κασαπίδης

Μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει την ύπαρξη δυο τάξεων απείρου, αυτής του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών (συμβ. N_0) και αυτής του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών (συμβ. c). Σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα, υπάρχουν και πολλές άλλες τάξεις απείρου.

Ορισμός: Έστω A ένα σύνολο. Δυναμοσύνολο του A (συμβ. $P(A)$) ονομάζουμε το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A. Δηλαδή
$$P(A) = \{X \,/\, X \subset A\}.$$

Θεώρημα (Cantor). Για κάθε σύνολο A ισχύει
$|A| < |P(A)|$ [Δηλαδή $|A| \leq |P(A)|$ και $|A| \neq |P(A)|$]

απόδειξη

Ισχύει $|A| \leq |P(A)|$ διότι η συνάρτηση $(x \overset{f}{\mapsto} \{x\})$ είναι 1-1 του A στο $P(A)$. Έτσι $A \sim S(A) \subset P(A)$
Έστω ότι υπάρχει αντιστοιχία $\Pi: A \twoheadrightarrow P(A)$ 1-1 και επί
[Δηλαδή έστω ότι $|A| = |P(A)|$].

Ορίζουμε το σύνολο
$$B = \{x \in A \,/\, x \notin \Pi(x)\}$$
Τότε $B \subset A$ και αφού η Π είναι επί, θα υπάρχει $\gamma \in A$ ώστε $B = \Pi(\gamma)$.
Τώρα είτε $\gamma \in B$ είτε $\gamma \notin B$.
Αν $\gamma \in B$ τότε $\gamma \notin \Pi(\gamma) = B$ άτοπο.
Αν $\gamma \notin B$ τότε $\gamma \in \Pi(\gamma) = B$ άτοπο. Επομένως η υπόθεση ότι $A \sim P(A)$ δεν μπορεί να είναι ορθή, το οποίο σημαίνει ότι $|A| < |P(A)|$.

Παρατήρηση: Ισχύει ότι:
$$|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| < |P(P(\mathbb{N}))| < \ldots,$$

21.

Φ1 Το πανηγύρι της διαγωνιοποίησης. Ο Κάντορ συνεχίζει στον ίδιο ιδιόρρυθμο σκοπό.

Φ3 Και μας αποκαλύπτει ότι τα άπειρα δεν έχουν τελειωμό. Το μικρότερο άπειρο είναι αυτό των φυσικών αριθμών, το συμβολίζουμε με N_0 (διάβαζε άλεφ μηδέν), το άπειρο των πραγματικών αριθμών είναι μεγαλύτερο από το N_0, το συμβολίζουμε με c ,και συχνά το αποκαλούμε , «η δύναμη του συνεχούς». Μπορεί να αποδειχτεί ότι c=|P(N)|. Δεν είναι γνωστό αν υπάρχει πληθάριθμος ανάμεσα στο N_0 και στο c. Κάποιοι δέχονται ότι δεν υπάρχει άλλος πληθάριθμος ανάμεσα στο N_0 και στο c. Αυτή η παραδοχή λέγεται «υπόθεση του συνεχούς», και οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο αμέσως επόμενος του N_0 είναι ο πληθάριθμος του συνεχούς.

Φ2 Ο Γκέντελ ,το 1940, έδειξε ότι η «η υπόθεση του συνεχούς» είναι συμβιβαστή με τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων. Το 1963 ο Cohen έδειξε ότι και η άρνηση της υπόθεσης του συνεχούς είναι συμβιβαστή με τα αξιώματα της συνολοθεωρίας.

Φ1 Τι εννοείς όταν λες είναι «συμβιβαστή»;

Φ2 Αν δεχτείς ότι ισχύει η πρόταση αυτή, δεν θα καταλήξεις σε κανένα αντιφατικό αποτέλεσμα μέσα στην θεωρία συνόλων.

Φ1 Και πως γίνεται ρε παιδιά , να είναι και η ίδια η υπόθεση του συνεχούς και η άρνησή της ,συμβιβαστές με την θεωρία συνόλων; Δεν είναι παράλογο αυτό;

Φ2 Θα ήταν παράλογο , αν κάποιος δεχόταν την ισχύ τους ταυτόχρονα. Αυτό που εννοούμε είναι ότι κάποιος είναι ελεύθερος να διαλέξει, αν βέβαια το θέλει, κάποια απ' αυτές που ενδεχομένως είναι πλησιέστερα στις διαισθήσεις του, και να αναπτύξει την θεωρία μαζί με τα υπόλοιπα αξιώματα.
Το ηθικό δίδαγμα είναι ότι η υπόθεση του συνεχούς , δεν μπορεί να αποδειχτεί ή να απορριφθεί στα πλαίσια της θεωρίας συνόλων.

Φ3 Έτσι έχουμε άλλο ένα παράδειγμα μη πλήρους θεωρίας, στο οποίο ο Γκέντελ έβαλε και πάλι το χεράκι του.

Φ2 Εδώ πρέπει να είμαστε λίγο ποιο προσεκτικοί. Η υπόθεση του συνεχούς, δεν είναι σαν την πρόταση του Γκέντελ που αφορά την μη πληρότητα της αριθμητικής. Η πρόταση του Γκέντελ γνωρίζουμε ότι είναι μια αληθής πρόταση που όμως είναι μη απαντήσιμη στα πλαίσια του αξιωματικού συστήματος του Πεανό για την αριθμητική, ενώ η υπόθεση του συνεχούς, είναι μεν μη απαντήσιμη στα πλαίσια της κατά Zermelo – Fraenkel αξιωματικής θεμελίωσης της θεωρίας συνόλων, όμως, δεν γνωρίζουμε αν είναι αληθής ή ψευδής.

Φ1 Με όλα αυτά τα θεωρήματα διαγωνιοποίησης , μου ήρθε στο μυαλό, δεν ξέρω γιατί, ένας συσχετισμός. Στο πανεπιστήμιο θυμάμαι σε κάποιο μάθημα λογικής, είχαμε συναντήσει το παράδοξο του Επιμενίδη. Ο Επιμενίδης ήταν Κρητικός και έλεγε : «όλοι οι Κρήτες είναι ψεύτες». Είναι αλήθεια, ή ψέμα αυτό που έλεγε; Αν λέει αλήθεια, τότε αφού κι ο ίδιος είναι Κρητικός, θα λέει ψέματα, παράλογο. Αν λέει ψέματα, τότε οι Κρήτες δεν είναι ψεύτες, άρα λένε αλήθεια, και πάλι άτοπο!

Φ3 Όχι , αν λέει ψέματα, η άρνηση της πρότασης «όλοι οι Κρήτες είναι Ψεύτες» , δεν είναι η πρόταση ότι «όλοι οι Κρητικοί λένε αλήθεια», αλλά η πρόταση «υπάρχει τουλάχιστον ένας Κρητικός, που λέει αλήθεια». Και επειδή δεν γνωρίζουμε γενικά αν αυτός ο Κρητικός είναι ο Επιμενίδης, δεν μπορούμε να πούμε ότι στην δεύτερη περίπτωση έχουμε αντίφαση. Το παράδοξο στην μορφή αυτή που μας ανέφερες, λέμε ότι είναι μια ημιαντινομία. Μισό παράδοξο αν θέλεις.

Φ2 Με μια μικρή παραλλαγή μπορούμε να το μετατρέψουμε σε πλήρες παράδοξο , το λεγόμενο παράδοξο του ψεύτη. Αν πω « λέω ψέματα» είναι αλήθεια η ψεύδος αυτό; Τώρα, αν

λέω αλήθεια τότε λέω ψέματα, και αν λέω ψέματα, τότε είναι ψέμα ότι λέω ψέματα, άρα λέω αλήθεια, κι έτσι καταλήγω σε αντίφαση όποια απάντηση και να επιχειρήσω να δώσω. Πάντως η διαίσθησή σου στην περίπτωση σε έχει δικαιώσει.
Όντως το παράδοξο αυτό, που ανήκει στην κατηγορία των λεγόμενων αυτοαναφορικών παραδόξων, έχει ομοιότητες στην κατασκευή του με τις διαγώνιες κατασκευές του Κάντορ.

Φ3 Τα αυτοαναφορικά παράδοξα εμφανίζονται κατά κάποιο τρόπο, όταν προτάσεις μιλούν για τον εαυτό τους. Στις διαγώνιες κατασκευές απ' την άλλη συσχετίζουμε τον ν-στο αριθμό με το ν-στο στοιχείο μιας λίστας, δηλαδή σχετίζουμε τον αριθμό ν, με κάτι που έχει επίσης μια ιδιαίτερη σχέση με τον ν.

Εν τω μεταξύ χτύπησε το κινητό τηλέφωνο του Φ1.
……………..Ναι;………..έλα αγάπη μου……………..τι ώρα; (μας κοιτάει με απορία)
Μόλις τότε συνηδειτοποιήσαμε όλοι , ότι η συζήτηση μας είχε συνεπάρει τόσο, που δεν καταλάβαμε ότι είχε περάσει ένα ολόκληρο τετράωρο.
……………ναι μωρό μου………μην φωνάζεις σ' ακούω…………..έρχομαι αμέσως.

Φ1 Πρέπει να φύγω. Είχαμε κανονίσει με την γυναίκα και την κόρη μου να πάμε σε κάποια γενέθλια και έχουμε αργήσει ήδη.

Φ2 Όλοι θα φύγουμε. Είναι θαύμα που δεν μας πήραν και οι δικές μας τηλέφωνο.

Φ3 Εε βλέπετε η μη πληρότητα δεν εμφανίζεται μόνο στα μαθηματικά, αλλά και στη ζωή!

Κατεβήκαμε , πληρώσαμε στο μπάρ και βγήκαμε στο δρόμο. Συμφωνήσαμε να ξαναβρεθούμε την επόμενη Κυριακή , στο ίδιο μέρος. Οικογενειακές υποχρεώσεις, δεν μας επέτρεψαν τελικά να συναντηθούμε την Κυριακή, κι έτσι συνεννοηθήκαμε να τα πούμε το επόμενο Σάββατο. Όταν έφτασα εγώ στο Μπαρόκ οι Φ1 και Φ3 ήταν ήδη εκεί. Ο Φ1 ήταν ιδιαίτερα ευδιάθετος , και σχολίαζε το αποτέλεσμα από το ματς της περασμένης Κυριακής για δυο γνωστές ποδοσφαιρικές ομάδες. Ο Φ3 τον άκουγε βαριεστημένα, ξεφυλλίζοντας το βιβλίο που κρατούσε στα χέρια του και με ένα ύφος που μου ήταν πάρα πολύ γνώριμο. Η αλήθεια είναι ότι στις συναντήσεις μας με τον Φ3, σπάνια μιλούσαμε για άλλα θέματα εκτός από τα Μαθηματικά, την Φιλοσοφία , την Φυσική και καμιά φορά για την εκπαίδευση. Για προσωπικά δε θέματα , δεν συζητούσαμε σχεδόν ποτέ. Θυμάμαι μάλιστα αρκετές φορές να μαθαίνει πράγματα ο ένας για τον άλλον από τρίτους ανθρώπους. Έτσι κάποτε ένας κοινός γνωστός μας, με ρώτησε αν βλέπω καθόλου τον Φ3. Του είπα ότι συνήθως βρισκόμαστε και τα λέμε μια φορά την εβδομάδα και τότε με ρώτησε αν είναι ευχαριστημένος με το καινούριο του αυτοκίνητο. Μα ο Φ3 δεν έχει καινούριο αυτοκίνητο του είπα, αφήνοντάς τον έκπληκτο να αναρωτιέται αν του λέω αλήθεια.
Η λαχτάρα μας για συζήτηση γύρω απ' τα θέματα που μας ενδιέφεραν, ήταν τέτοια που κανείς δεν πίστευε ότι είναι δυνατόν δυο φίλοι σε μια καφετερία, να μιλούν για τα μαθηματικά, και όχι για άλλες ιστορίες καθημερινής τρέλας, όπως όλοι οι φυσιολογικοί άνθρωποι. Έβγαλα λοιπόν τον Φ3 από το αδιέξοδο, αλλάζοντας το θέμα της συζήτησης.

Φ2 Είδα προχθές στο Ίντερνετ ότι τον Ιούλιο θα έχει στο πανεπιστήμιο της Θεσσαλονίκης μια σειρά διαλέξεων με θέμα το θεώρημα του Γκέντελ. Τι θα λέγατε να δηλώσουμε συμμετοχή;

Φ3 Πότε ακριβώς είναι οι διαλέξεις;

Φ2 Από πρώτη μέχρι πέντε Ιουλίου.

κείμενο: Γ. Κασαπίδης

Φ1 Εσείς να πάτε. Εμένα τι με θέλετε μαζί σας; Είμαι σίγουρος ότι δεν θα καταλάβω τίποτε από τέτοιου είδους παρακολουθήσεις.

Φ2 Για μας είναι πρώτης τάξεως ευκαιρία να ακούσουμε για το θέμα αυτό από κάποιους ειδικούς. Αν έρθεις θα είναι επίσης και ένα στοίχημα να καταφέρουμε να σου εξηγήσουμε με τρόπο κατανοητό το ζήτημα.

Φ3 Μετά από κάθε διάλεξη θα σου αναλύουμε το περιεχόμενό της. Δες το σαν μια σοβαρή νοητική πρόκληση.

Φ1 Θα το σκεφτώ και θα σας ενημερώσω. Πάντως σαν καλός μαθητής που είμαι θα ήθελα τώρα να συνεχίσουμε την συζήτησή μας από εκεί που την αφήσαμε την τελευταία φορά. Μου είχατε πει, αν θυμόσαστε , ότι παράδοξο δεν σημαίνει κάτι παράλογο, αλλά κάτι που είναι κόντρα στις διαισθήσεις μας.

Φ3 Πως δεν το θυμάμαι, εγώ το είπα.

Φ1 Και τα λεξικά κάπως έτσι ορίζουν την έννοια, ως μια αντίθετη άποψη στη γενική γνώμη, και προσθέτουν μια έννοια πιο γενική μιας κατάστασης παράξενης, απίστευτης, άτοπης. Γιατί τα λέω αυτά; Τα αποτελέσματα του Κάντορ, όσο παράξενα και να φαντάζουν στα μάτια αυτού που τα πρωτοβλέπει, εκφράζουν ωστόσο κάποιες αλήθειες. Στο παράδοξο του ψεύτη όμως ποια αλήθεια εκφράζεται που δεν είναι σύμφωνη με τις διαισθήσεις μας; Που ακριβώς βρίσκεται το παράδοξο;

Φ3 Δεν έχουμε γενικά την πίστη ότι σε κάθε πρόταση με νόημα αντιστοιχεί και μια αληθοτιμή;

Φ1 Ότι μπορούμε δηλαδή να την χαρακτηρίσουμε ως αληθή ή ψευδή;

Φ3 Ακριβώς.

Φ1 Σίγουρα το πιστεύουμε αυτό, έστω κι αν μερικές φορές δεν γνωρίζουμε ποια αληθοτιμή είναι η σωστή.

Φ3 Το παράδοξο λοιπόν εδώ είναι ότι στην φράση «λέω ψέματα», δεν μπορούμε να αποδώσουμε τιμή αλήθειας. Και ο συλλογισμός που κάνουμε μας πείθει ότι αυτό είναι κάτι σωστό. Έτσι η αλήθεια που εκφράζεται στην περίπτωση αυτή είναι το γεγονός ότι τελικά δεν είναι σωστό το ότι κάθε πρόταση με νόημα, μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ψευδής.
Ο Quine πάντως, αποκαλεί «αντινομίες» αυτές τις περιπτώσεις όπως του παραδόξου του Ψεύτη. Γι' αυτό νομίζω και ο Φ2 αποκάλεσε το παράδοξο του Επιμενίδη «ημιαντινομία», αν και δεν ξέρω σε τι θα αποσκοπούσε η διαφοροποίηση στην ορολογία.

Φ2 Δεν είναι προτιμότερο να δούμε κάποια παράδοξα ακόμη, για να έχουμε μια ποιο σαφή εικόνα του τοπίου;

Φ3 Δίκιο έχεις. Να ασχοληθούμε όμως με παράδοξα που σχετίζονται περισσότερο με το θέμα που μας ενδιαφέρει. Ας μην αναφερθούμε στα παράδοξα του Ζήνωνα που αφορούν την κίνηση, ούτε στα παράδοξα της θεωρίας πιθανοτήτων ή της λογοτεχνίας.

Φ2 Σύμφωνοι. Θα πιάσω εγώ τα λεγόμενα λογικά ή συνολοθεωρητικά παράδοξα, και εσύ στη συνέχεια θα μας αναπτύξεις κάποια από τα ερμηνευτικά παράδοξα.

ΓΚΕΝΤΕΛ

κείμενο: Γ. Κασαπίδης

Ξεκινώ λοιπόν με το παράδοξο που βρήκε ο Ράσελ το 1902.
Έστω ότι P συμβολίζει το σύνολο όλων των συνόλων χ που έχουν την ιδιότητα: το χ δεν ανήκει στο χ.
δηλαδή P={χ / χ σύνολο τέτοιο ώστε: χ δεν ανήκει χ }.
Φ1 Ε;;;;;;; Γίνεται ένα σύνολο να περιέχει ως στοιχεία άλλα σύνολα;

Φ2 Κατά τον ορισμό που έδωσε ο Κάντορ τίποτε δεν το απαγορεύει αυτό. Για παράδειγμα το σύνολο B={3,2,{3,4,6},{4}} έχει ως στοιχεία τα 3, 2 καθώς και τα σύνολα {3,4,6} και {4}. Πολλά σύνολα δεν είναι στοιχεία του εαυτού τους, για παράδειγμα το σύνολο όλων των σκύλων δεν είναι σκύλος. Από την άλλη το σύνολο όλων των συνόλων είναι προφανώς σύνολο. Το σύνολο P λοιπόν ορίζεται από όλα τα σύνολα που έχουν την ιδιότητα να μην περιέχουν τον εαυτό τους ως στοιχείο.

Φ1 Έτσι για παράδειγμα το σύνολο όλων των σκύλων ανήκει στο P.

Φ2 Σωστά. Ρωτάμε τώρα. Το σύνολο P περιέχει τον εαυτό του ή όχι;

Φ1 Μην το πεις, άσε με να το βρω μόνος μου. Αν το P ανήκει στο P, τότε θα ικανοποιεί την ιδιότητα που ορίζει το P, δηλαδή το P δεν θα ανήκει στο P, άτοπο! Άρα το P δεν θα ανήκει στο P, πράγμα όμως που σημαίνει, σύμφωνα πάντα με τον ορισμό του P, ότι το P ανήκει στο P και πάλι άτοπο! Συμπέρασμα. Ενώ πιστεύουμε ότι ένα στοιχείο ή θα ανήκει ή δεν θα ανήκει σε ένα σύνολο P, στο ερώτημα αν το P ανήκει στο P, κάθε μια από τις δυο δυνατές περιπτώσεις απάντησης καταλήγει σε αδιέξοδο, και είμαστε μπροστά σε ένα ακόμη παράδοξο.

Φ2 Τρία χρόνια πριν ο Ράσελ ανακαλύψει το παράδοξό του, δηλαδή το 1899, ο ίδιος ο Κάντορ βρήκε πως η θεωρία του οδηγούσε επίσης σε ένα παράδοξο, γνωστό σήμερα σαν παράδοξο του Κάντορ και είναι το εξής:
Αν A συμβολίζει το σύνολο όλων των συνόλων, έχουμε δει ότι το δυναμοσύνολό του P(A) , έχει πληθάριθμο μεγαλύτερο του A. Όμως αφού το A είναι το σύνολο όλων των συνόλων, αυτό θα έπρεπε να έχει τον μεγαλύτερο δυνατό πληθάριθμο. Έτσι το A φαίνεται να έχει τις αντιφατικές ιδιότητες να έχει και να μην έχει το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων.

Φ1 Εγώ πάντως θα συμφωνούσα με την ονομασία αντινομίες και για τα τρία παράδοξα που αναφέραμε μέχρι τώρα. Στο παράδοξο του ψεύτη και στο παράδοξο του Ράσελ βλέπω να έχουμε μια παραβίαση της λογικής αρχής του αποκλειομένου τρίτου, ενώ στο παράδοξο του Κάντορ φαίνεται να έχουμε παραβίαση της αρχής της μη αντίφασης.

Φ2 Δεν έχεις άδικο. Στο παράδοξο του ψεύτη, ενώ ξέρουμε ότι μια πρόταση ή θα είναι αληθής ή δεν θα είναι αληθής, εμείς καταλήγουμε ότι τίποτε από τα δυο δεν συμβαίνει. στο παράδοξο του Ράσελ το P ή θα ανήκει ή δεν θα ανήκει στο P, και τίποτε από τα δυο και πάλι δεν μπορεί να ισχύει, ενώ στο παράδοξο του Κάντορ το σύνολο όλων των συνόλων πρέπει να έχει και να μην έχει ταυτόχρονα την ιδιότητα του μέγιστου πληθαρίθμου.

Φ3 Θέλετε να πείτε δηλαδή ,ότι εδώ ξεφεύγουμε από την απλή παραξενιά ενός μη αναμενόμενου αποτελέσματος και έχουμε λογικά σφάλματα, ή τουλάχιστον ενδείξεις ότι κάτι δεν πάει καλά στους συλλογισμούς μας.

ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ