

«Οι ντουλάπες»***

Καλοκαίρι 2009

Ένα γυμνάσιο έχει μια περίεργη συνήθεια. Τη πρώτη μέρα της χρονιάς βάζει τους μαθητές να κάνουν μια περίεργη τελετή έναρξης:

Υπάρχουν 1000 ντουλάπια και 1000 μαθητές στο σχολείο. Η διεύθυνση του σχολείου ζητά από τον πρώτο μαθητή να πάει σε κάθε ντουλάπι και να τ' ανοίξει. Μετά ζητά από τον δεύτερο μαθητή να πάει σε κάθε δεύτερο ντουλάπι και να το κλείσει. Μετά ζητά από τον 3^ο μαθητή να πάει σε κάθε τρίτο ντουλάπι και, αν είναι κλειστό, να το ανοίξει, αν είναι ανοικτό, να το κλείσει. Ο 4^{ος} μαθητής κάνει το ίδιο για κάθε τέταρτο ντουλάπι κλπ.

Αφού τελειώσει όλη η διαδικασία και με τον χιλιοστό μαθητή, πόσα ντουλάπια θα είναι ανοικτά;

(Η λύση στην επόμενη σελίδα)

ΛΥΣΗ

☞ Τα μόνα ντουλάπια που μένουν τελικά ανοιχτά είναι τα τέλεια τετράγωνα (1, 4, 9, 16) γιατί είναι οι μόνοι αριθμοί που διαιρούνται από περιττό συνολικά αριθμό διαιρετών. Κι αυτό γιατί κάθε άλλος διαιρέτης εκτός από την τετραγωνική τους ρίζα θα έχει και ένα άλλο «ταίρι». Έτσι, αυτά τα ντουλάπια θα ανοιγοκλείσουν περιττό αριθμό φορές, οπότε θα μείνουν στο τέλος ανοιχτά. Όλοι τα υπόλοιπα ντουλάπια διαιρούνται με άρτιο συνολικά αριθμών διαιρετών, κατά συνέπεια στο τέλος θα είναι κλειστά.

☞ Συνεπώς ο αριθμός των ανοιχτών ντουλαπιών είναι ο αριθμός των τέλειων τετραγώνων που είναι μικρότερα του 1000. Αυτοί οι αριθμοί είναι: $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 31^2$. (Το $32^2 = 1024 > 1000$)

☞ **Άρα τα συνολικά ντουλάπια θα είναι 31**

(Απλό αλλά ... δύσκολο)