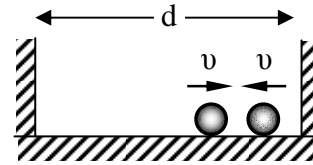


Βρείτε τη περίοδο*

Καλοκαίρι 2010

Δύο όμοιες σφαίρες ολισθαίνουν σε λείο οριζόντιο επίπεδο το οποίο οροθετείται από δύο κατακόρυφα επίπεδα που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d . Αν κάποια στιγμή οι σφαίρες συγκρούονται σε τυχαίο σημείο με ταχύτητες ίσου μέτρου u αλλά αντίθετης φοράς (σχήμα), ν' αποδείξετε ότι η κίνηση των σφαιρών θα είναι περιοδική και να βρείτε την περίοδο της. Κάντε διερεύνηση της άσκησης.



Διευκρίνιση: Θεωρείστε ότι όλες οι κρούσεις κατά τη διάρκεια του φαινομένου είναι *ελαστικές* δηλαδή: α) όταν οι σφαίρες κτυπούν στα κατακόρυφα επίπεδα αναπηδούν με ταχύτητα ίσου μέτρου και β) όταν κτυπούν μεταξύ τους ανταλλάσσουν ταχύτητες.

(Η λύση στην επόμενη σελίδα)

ΛΥΣΗ

Από την διευκρίνιση της άσκησης καταλαβαίνουμε ότι εφόσον οι σφαίρες είναι όμοιες και συγκρούονται ελαστικά με ταχύτητες ίσου μέτρου v , θα διατηρήσουν σταθερό το μέτρο της ταχύτητας καθ' όλη τη διάρκεια του φαινομένου. Δηλαδή οι ταχύτητες τους θα διατηρούν σταθερό μέτρο v συνεχώς (είτε κρούονται μεταξύ τους είτε με τα τοιχώματα).

Έστω ότι οι σφαίρες συγκρούονται σε απόσταση a από το κοντινότερο τοίχωμα (σχήμα 1).

Μετά τη κρούση θα κινηθούν με ταχύτητες μέτρου v αντίθετα ή μία από την άλλη (σχήμα 2) και αφού η δεξιά αναπηδήσει στο δεξί τοίχωμα (σχήμα 3), θα κινηθεί προς τα αριστερά κυνηγώντας την άλλη σφαίρα. Ακολουθώντας, η αριστερή σφαίρα θα αναπηδήσει με τη σειρά της στο αριστερό τοίχωμα (σχήμα 4) και θα κινηθεί να συγκρουστεί με την δεξιά. (σχήμα 5)

Έστω τώρα ότι το σημείο που συγκρούονται για δεύτερη φορά απέχει απόσταση β από το αριστερό τοίχωμα.

Εφόσον οι σφαίρες κινούνται με σταθερές ταχύτητες θα έχουν διανύσει μεταξύ των δύο κρούσεων και την ίδια απόσταση. Η απόσταση που διάνυσε η αριστερή σφαίρα είναι $s_1 = d - a + \beta$. Ενώ η απόσταση της δεύτερης σφαίρας είναι: $s_2 = a + d - \beta$.

Αφού: $s_1 = s_2$, έχουμε: $d - a + \beta = a + d - \beta$.

Οπότε: $a = \beta$.

Άρα οι σφαίρες θα συγκρουστούν στο συμμετρικά απέναντι σημείο αφού διανύσουν απόσταση:

$$d - a + a = d.$$

Συνεπώς θα χρειαστούν χρονικό διάστημα $\Delta t = d/v$.

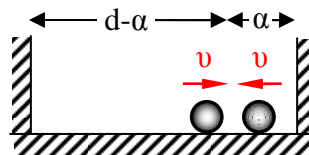
Προφανώς η κίνηση θα συνεχιστεί συμμετρικά και οι σφαίρες θα συγκρουστούν (πάντα με ταχύτητες μέτρου v) στο αρχικό σημείο μετά από χρονικό διάστημα $2\Delta t$. Άρα

η περίοδος της κίνησης είναι $T = \frac{2d}{v}$

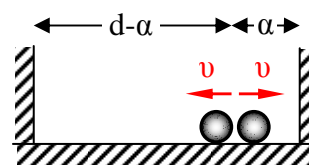
Διερεύνηση:

Εξαίρεση στον παραπάνω συλλογισμό αποτελεί η περίπτωση κατά την οποία οι σφαίρες συγκρούονται **στο μέσο της απόστασης** των δύο τοιχωμάτων ($a = d/2$) (διπλανό σχημα). Σ' αυτή τη περίπτωση, εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι (λόγω συμμετρίας) οι σφαίρες θα συναντηθούν, με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, μετά από χρονικό διάστημα d/v .

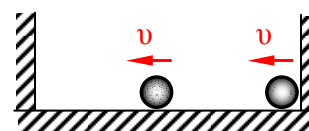
Άρα (σ' αυτή τη περίπτωση): $T = \frac{d}{v}$



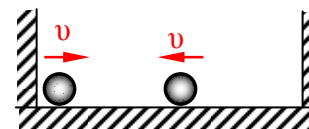
σχήμα 1



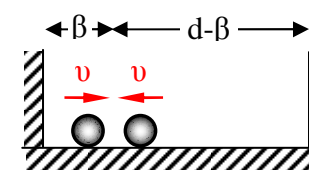
σχήμα 2



σχήμα 3



σχήμα 4



σχήμα 5

