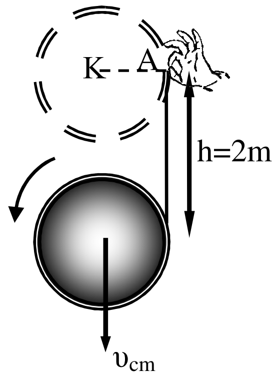
Πλατάκης Φίλιππος - Φυσικός
fil_platakis@yahoo.gr

«Πόσο είναι το τυλιγμένο σχοινί;»***

Μάρτιος 2012



Ομογενές κύλινδρος, μάζας M = 4 Kg, έχει τυλιγμένο γύρω του λεπτό σχοινί, το οποίο έχει μάζα 200 g σε κάθε μέτρο του (δηλ. γραμμική πυκνότητα d = 0,2 Kg/m). Το σχοινί αρχικά είναι όλο τυλιγμένο ομοιόμορφα στην κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου και κάποια στιγμή κρατώντας το ελεύθερο άκρο του σχοινιού σταθερό στο σημείο A, αφήνουμε τον κύλινδρο να κυλίσει προς τα κάτω. Αν τη στιγμή που έχει ξεδιπλωθεί σχοινί μήκους 2 m, το κέντρο μάζας του κύλινδρου έχει ταχύτητα 5 m/s, πόσο είναι συνολικά το μήκος του σχοινιού που ήταν τυλιγμένο γύρω από τον κύλινδρο;
Δίνεται α) $g = 10\ m/s^2$ β) η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του: $I_{cm} = ½\ MR^2$ (όπου M: η μάζα του και R: η ακτίνα των βάσεων του) γ) η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα δ) η ακτίνα του κυλίνδρου είναι αρκετά μικρή ώστε το σχοινί να παραμένει ομοιόμορφα τυλιγμένο και στη κάτω θέση του κυλίνδρου.

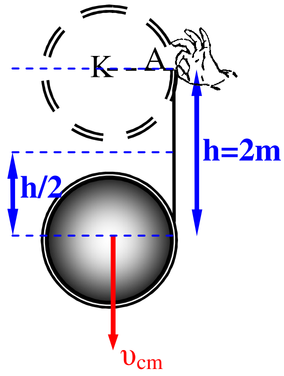
Η λύση στην επόμενη σελίδα

Πλατάκης Φίλιππος - Φυσικός
fil_platakis@yahoo.gr

ΛΥΣΗ

☞ Έστω ***m*** η μάζα του τυλιγμένου σχοινιού στην αρχική θέση του κυλίνδρου. Προφανώς η απομείνασα μάζα του σχοινιού στην κατώτερη θέση είναι ***m – 0,4 (Kg)*** (λόγω των 2 m σχοινιού που ξετυλίχτηκε).

☞ Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου με σχοινί μάζας $m_{ΣΧ}$ γύρω του θα είναι: $I = I_{cm} + m_{ΣΧ}R^2$.



Άρα $I_{αρχ} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 = \left(\frac{M}{2} + m\right)R^2$ και

$I_{τελ} = \frac{1}{2}MR^2 + (m - 0{,}4)R^2 = \left(\frac{M}{2} + m - 0{,}4\right)R^2$

☞ Η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου στην κάτω θέση θα είναι:

$$K_{τελ} = K_{μετ} + K_{στρ} = \frac{1}{2}M_{ΟΛ}\upsilon_{cm}^{\ 2} + \frac{1}{2}I_{τελ}\omega^2 \Leftrightarrow$$

$$K_{τελ} = \frac{1}{2}(M + m - 0{,}4)\upsilon_{cm}^{\ 2} + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m - 0{,}4\right)R^2\omega^2 \Leftrightarrow$$

$$K_{τελ} = \frac{3}{4}M\upsilon_{cm}^{\ 2} + (m - 0{,}4)\upsilon_{cm}^{\ 2} \quad \textit{(I)}$$

☞ Εφαρμόζοντας Α.Δ.Μ.Ε. από την αρχική μέχρι την τελική θέση έχουμε:

$$U_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ} \Leftrightarrow$$

$$(M + m)gh\,(\text{ο κύλινδρος με όλο το σχοινί}) = 0{,}4g\frac{h}{2}\,(\text{το κρεμασμένο σχοινί}) + K_{τελ} \overset{(I)}{\Leftrightarrow}$$

$$Mgh + mgh = 0{,}4g\frac{h}{2} + \frac{3}{4}M\upsilon_{cm}^{\ 2} + (m - 0{,}4)\upsilon_{cm}^{\ 2} \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot 10 \cdot 2 + m \cdot 10 \cdot 2 = 0{,}4 \cdot 10 \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot 5^2 + m \cdot 5^2 - 0{,}4 \cdot 5^2 \Leftrightarrow$$

$$80 + 20m = 4 + 75 + 25m - 10 \Leftrightarrow$$

$$80 - 69 = 25m - 20m \Leftrightarrow$$

$$m = \frac{11}{5}Kg$$

☞ Άρα αν ℓ: είναι το συνολικό μήκος του σχοινιού θα έχουμε: $d\ell = m \Leftrightarrow \ell = \frac{m}{d} = \frac{11/5}{0{,}2} \Leftrightarrow$

$$\boxed{\ell = 11m}$$