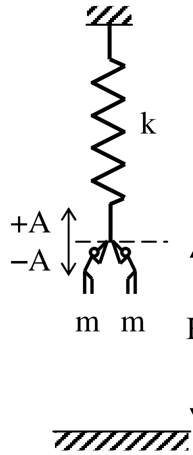
Πλατάκης Φίλιππος - Φυσικός
fil_platakis@yahoo.gr

«Πέφτοντας από το ελατήριο»***

Δεκέμβριος 2011

Δύο παιδιά, μάζας m = 50 Kg έκαστο, είναι κρεμασμένα από το κατώτερο άκρο γιγαντιαίου κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k = 1000 N/m του οποίου το άλλο άκρο είναι σταθερά πιασμένο. Τα παιδιά εκτελούν α.α.τ. πλάτους 1 m της οποίας η θέση ισορροπίας βρίσκεται σε ύψος H = 26 m πάνω από το έδαφος.

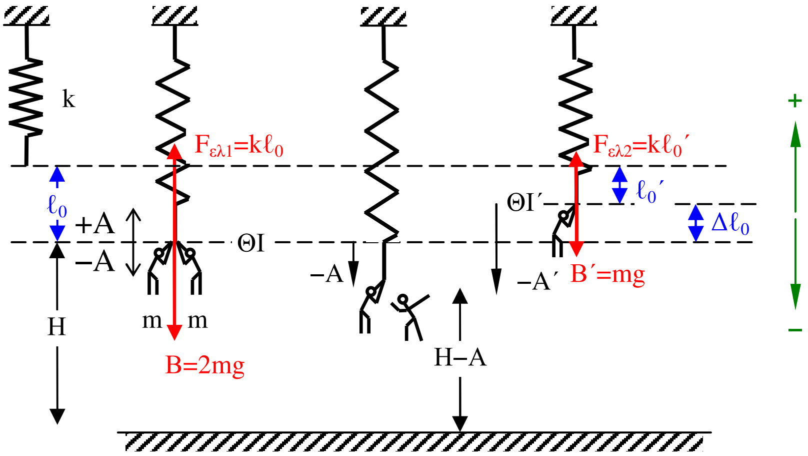


Κάποια στιγμή το παιδί (1) αφήνει το ελατήριο σε τέτοια θέση ώστε όταν φτάσει στο έδαφος να χτυπήσει με τη μικρότερη δυνατόν ταχύτητα. Πόσο θα απέχει από το έδαφος το παιδί (2), όταν το (1) θα φτάνει στο έδαφος;

Θεωρείστε α) τα παιδιά είναι υλικά σημεία, β) η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, γ) $10 \approx 3\pi$ και δ) $g = 10\ m/s^2$

Η λύση στην επόμενη σελίδα

ΛΥΣΗ



☞ Προφανώς για να φτάσει στο έδαφος με τη μικρότερη δυνατόν ταχύτητα, το παιδί (1) θα πρέπει να αφήσει το ελατήριο στην κατώτερη θέση. Οπότε τότε θα απέχει από το έδαφος απόσταση Η – Α = 26 – 1 = 25 m. Συνεπώς ο χρόνος που θα χρειαστεί για να φτάσει στο έδαφος θα είναι: $H-A=\frac{1}{2}gt_1^{\,2} \Leftrightarrow t_1=\sqrt{\frac{2(H-A)}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 25}{10}} \Leftrightarrow t_1=\sqrt{5}s$

☞ Φεύγοντας όμως το παιδί (1), το ελατήριο «ελαφρώνει» (αφού κρεμιέται μόνο το παιδί (2) απ' αυτό) και πρέπει να βρούμε τη νέα θέση ισορροπίας του (Θ.Ι.΄).
Αν $ℓ_0$ ονομάσουμε την απόσταση της αρχικής θέσης ισορροπίας (Θ.Ι.) από το φυσικό μήκος του ελατηρίου, θα έχουμε:

$$k\ell_0=2mg \Leftrightarrow \ell_0=\frac{2mg}{k}=\frac{2\cdot 50\cdot 10}{1000}=\frac{1000}{1000} \Leftrightarrow \ell_0=1m$$

Αν $ℓ_0΄$ ονομάσουμε την απόσταση της νέας θέσης ισορροπίας (Θ.Ι.΄) από το φυσικό μήκος του ελατηρίου, θα έχουμε:

$$k\ell_0'=mg \Leftrightarrow \ell_0'=\frac{mg}{k}=\frac{50\cdot 10}{1000}=\frac{500}{1000} \Leftrightarrow \ell_0'=0{,}5m$$

Συνεπώς η νέα θέση ισορροπίας απέχει από την αρχική απόσταση $Δℓ_0 = ℓ_0 − ℓ_0΄ \Leftrightarrow$ ***$Δℓ_0$= 0,5 m***

☞ Άρα το νέο πλάτος ταλάντωσης του παιδιού (2) θα είναι *Α΄= Α + $Δℓ_0$* $\Leftrightarrow$ ***Α΄= 1,5 m***

☞ Και η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης του θα είναι:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{1000}{50}}=\sqrt{20} \Leftrightarrow \omega=2\sqrt{5}rad/s$$

☞ Αν θεωρήσουμε t = 0 τη στιγμή που φεύγει το ένα παιδί, τότε η ταλάντωση του άλλου θα έχει αρχική φάση $φ_0$, διότι $y_1 = − A$. Άρα $\eta\mu\varphi_0=\frac{-A'}{A'}=-1 \Leftrightarrow$ ***$φ_0$ = 3π/2***

☞ Η εξίσωση λοιπόν της ταλάντωσης του παιδιού (2) είναι:

$$y=1{,}5\eta\mu\left(2\sqrt{5}t+\frac{3\pi}{2}\right)(S.I.)$$

☞ Και για $t_1=\sqrt{5}s$ έχουμε:

$$y_1=1{,}5\eta\mu\left(2\sqrt{5}t_1+\frac{3\pi}{2}\right)=1{,}5\eta\mu\left(2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}+\frac{3\pi}{2}\right)=1{,}5\eta\mu\left(10+\frac{3\pi}{2}\right)\cong 1{,}5\eta\mu\left(3\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=+1{,}5m$$

☞ Άρα το παιδί (2) θα απέχει από το έδαφος: Η − Α+ Α΄ + y_1 = 26 − 1 + 1,5 + 1,5 = **28 m**.