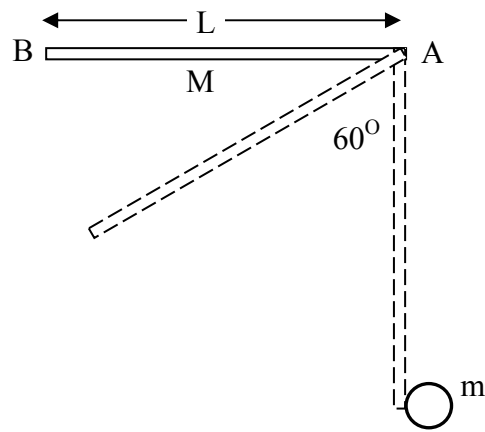


Bouncing stick

Μάιος 2006

Ομογενής ράβδος AB μάζας $M = 2 \text{ Kg}$ και μήκους $L = 0,3 \text{ m}$, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο στο σημείο A. Η ράβδος αφήνεται ελεύθερη από την οριζόντια θέση και όταν φτάνει στην κατακόρυφο κτυπά σε ακίνητο σώμα μάζας $m = 5 \text{ Kg}$. Μετά τη κρούση η ράβδος αναπηδά προς τα πίσω και ακινητοποιείται στιγμιαία όταν σχηματίζει γωνία 60° με την κατακόρυφο. Να βρεθεί με πόση ταχύτητα απέκτησε η μάζα M αμέσως μετά τη κρούση.



Δίνονται: α) Η ροπή αδράνειας ράβδου μάζας M και μήκους L , ως προς άξονα που περνά κάθετα από το μέσο της είναι: $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$. β) $g = 10 \text{ m/s}^2$. (Η λύση δεν είναι ακέραιος αριθμός).

Η λύση στην επόμενη σελίδα

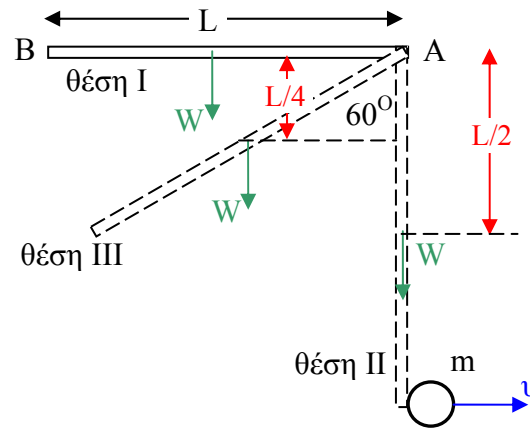
ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε, από το νόμο του Steiner, τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το A:

$$I_A = I_{CM} + M(L/2)^2 = 1/12ML^2 + 1/4ML^2 \Rightarrow I_A = 1/3ML^2.$$

Εφαρμόζοντας Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας από τη θέση I μέχρι τη θέση II έχουμε:

$$\begin{aligned} U_1 &= K_2 \Rightarrow \\ MgL/2 &= 1/2 I_A \omega^2 \Rightarrow \\ MgL/2 &= 1/2 \cdot 1/3 ML^2 \omega^2 \Rightarrow \\ \omega &= \sqrt{\frac{3g}{L}} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s} \end{aligned}$$



Η ράβδος μετά την ανάκρουση της ανεβαίνει στο μισό ύψος απ' αυτό από το οποίο έπεφτε (θέση III). Άρα η κινητική ενέργεια που έχει μετά τη κρούση θα είναι προφανώς η μισή αυτής που είχε πριν τη κρούση (αφού η τελική δυναμική ενέργεια της είναι η μισή της αρχικής δυναμικής ενέργειας). Άρα αν ω' : η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά την κρούση έχουμε:

$$\begin{aligned} 1/2 I_A \omega'^2 &= 1/2 (1/2 I_A \omega^2) \Rightarrow \\ \omega' &= \frac{\omega}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega' = 5\sqrt{2} \text{ m/s} \end{aligned}$$

Κατά την κρούση όμως ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής. Οπότε έχουμε:

$$I_A \omega = I_A \omega' + mvL$$

και λύνοντας ως προς την ταχύτητα v του σώματος έχουμε

$$v = 0,341 \text{ m/s}$$