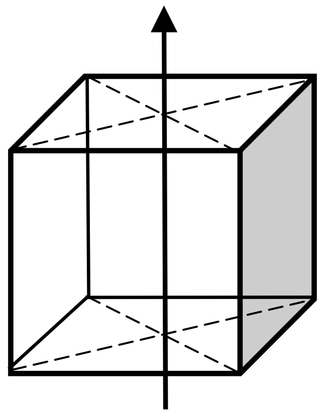
Πλατάκης Φίλιππος - Φυσικός
fil_platakis@yahoo.gr

Άξονας πάνω στον κύβο

Μάρτιος 2007



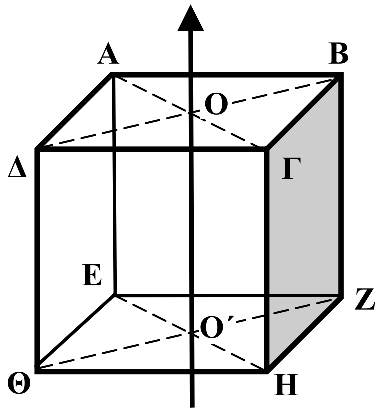
Δώδεκα ίδιοι ομογενείς ράβδοι, μάζας m και μήκους ℓ η καθεμία, είναι συνδεδεμένες έτσι ώστε να σχηματίζουν το περίγραμμα ενός κύβου. Πόση είναι η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς άξονα που περνά από το σημείο τομής των διαγωνίων δύο απέναντι πλευρών του κύβου;

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου ως προς άξονα περιστροφής κάθετο σ΄ αυτήν και διερχόμενο από το μέσο της είναι $I_{cm}={}^{1}/_{12}m\ell^2$, όπου m η μάζα της ράβδου και ℓ το μήκος της.

Η λύση στην επόμενη σελίδα

Πλατάκης Φίλιππος - Φυσικός
fil_platakis@yahoo.gr

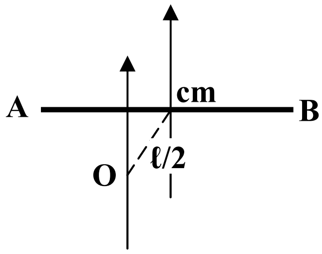
ΛΥΣΗ



Σχήμα 1

Ξέρουμε ότι η ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι ίση με το άθροισμα των ροπών αδράνειας των επιμέρους ακμών του κύβου. Λόγω συμμετρίας, η ροπή αδράνειας της πλευράς ΑΒΓΔ (σχήμα 1) είναι ίση με τη ροπή αδράνειας της ΕΖΗΘ.

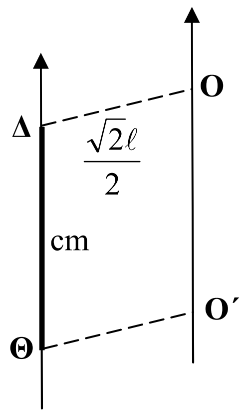
Άρα: $I_{ΑΒΓΔ} = I_{ΕΖΗΘ}$. ***(I)***



Σχήμα 2

Όμως η πλευρά ΑΒΓΔ αποτελείται από 4 ίσες ακμές η οποίες απέχουν εξίσου απόσταση ℓ/2 (το μισό του μήκους της ακμής) από τον άξονα ΟΟ΄ (σχήμα 2).

Άρα $I_{ΑΒΓΔ} = 4I_{ΑΒ}$ ***(II)*** (πάλι για λόγους συμμετρίας)
Εφαρμόζοντας το νόμο του Steiner, η ροπή αδράνειας της ΑΒ ως προς τον ΟΟ΄ θα είναι $I_{AB} = I_{cm} + m(\ell/2)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^2 \Rightarrow I_{AB} = \frac{1}{3}m\ell^2$.
Οπότε από ***(II)*** $\Rightarrow I_{ΑΒΓΔ} = \frac{4}{3}m\ell^2$.
και από ***(I)*** $\Rightarrow I_{ΕΖΗΘ} = \frac{4}{3}m\ell^2$.



Σχήμα 3

Απομένουν οι κατακόρυφες ακμές ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ και ΔΘ. Για λόγους πάλι συμμετρίας θα ισχύει $I_{ΑΕ} = I_{ΒΖ} = I_{ΓΗ} = I_{ΔΘ}$ ***(III)***
Υπολογίζουμε λοιπόν τη ροπή αδράνειας της ΔΘ (σχήμα 3).
Εφαρμόζοντας πάλι Steiner, έχουμε $I_{ΔΘ} = I_{cm} + m(ΔΟ)^2$. Όμως αφενός Icm = 0 (αφού όλα τα υλικά σημεία από τα οποία αποτελείται η ράβδος βρίσκονται πάνω στον άξονα), αφετέρου $ΔΟ = \frac{\sqrt{2}\ell}{2}$.
Οπότε $I_{ΔΘ} = m\ell^2/2$. Και από ***(III)*** $\Rightarrow I_{ΑΕ} = I_{ΒΖ} = I_{ΓΗ} = m\ell^2/2$

Συνεπώς: $I_{ΟΛ} = I_{ΑΒΓΔ} + I_{ΕΖΗΘ} + I_{ΑΕ} + I_{ΒΖ} + I_{ΓΗ} + I_{ΔΘ} = \frac{14}{3}m\ell^2$